

N° d'enregistrement

au C.N.R.S.

A.O. 3512

ARTICLE PRINCIPAL

réservant en partie

LA THESE DE DOCTORAT ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES DE PARIS

par

Irène MORET-BAILLY

pour obtenir

le grade de DOCTEUR ES SCIENCES

Sujet de la thèse : STRUCTURE DU CHAMP GRAVITATIONNEL

NON-RADIATIF EN RELATIVITE GENERALE

Soutenue le 17 octobre 1969 devant la COMMISSION d'EXAMEN :

MM. A. LICHNEROWICZ

Président

A. PAPAPETROU

Mme M.A. TONNELAT

Examineurs

Mme Y. CHOQUET-BRUHAT

N° d'enregistrement

au C.N.R.S.

A.O. 3512

ARTICLE PRINCIPAL

recorvant en partie

LA THESE DE DOCTORAT ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES DE PARIS

par

Irène MORET-BAILLY

pour obtenir

le grade de DOCTEUR ES SCIENCES

Sujet de la thèse : STRUCTURE DU CHAMP GRAVITATIONNEL

NON-RADIATIF EN RELATIVITE GENERALE

Soutenue le 17 octobre 1969 devant la COMMISSION d'EXAMEN :

MM. A. LICHNEROWICZ

Président

A. PAPAPETROU

Mme M.A. TONNELAT

Examinateurs

Mme Y. CHOQUET-BRUHAT

N° 2, 1881-1882

et O. B. B.

A. B. B.

AVOUE & ASSOCIES

100, 101, 102, 103

LA TROISIEME PARTIE DE LA LOI SUR LA PROTECTION DES MARQUES

1881-1882

A LA FACULTE DES SCIENCES DE LA LOI

Par

LE DOCTEUR EN DROIT

LE DOCTEUR EN DROIT

LA TROISIEME PARTIE DE LA LOI SUR LA PROTECTION DES MARQUES

LA TROISIEME PARTIE DE LA LOI SUR LA PROTECTION DES MARQUES

LA TROISIEME PARTIE DE LA LOI SUR LA PROTECTION DES MARQUES



LA TROISIEME PARTIE DE LA LOI SUR LA PROTECTION DES MARQUES

M. A. LICHNEROWITZ

A. RAPAPORT

M. A. LICHNEROWITZ

M. Y. CHOCHEVITZ

Je suis profondément reconnaissante à Madame M.A. Tonnelat, Professeur, qui m'a initiée à la recherche et qui n'a cessé de m'encourager avec bienveillance.

J'exprime ma respectueuse gratitude à Monsieur le Professeur A. Lichnerowicz pour sa bienveillance et pour ses enseignements.

C'est pour moi un grand honneur que Madame Y. Choquet, Professeur, ait bien voulu témoigner de l'intérêt à ce travail en acceptant de faire partie du jury.

Je tiens à exprimer ma très vive reconnaissance et ma profonde gratitude à Monsieur A. Papapetrou, Directeur de Recherches, qui a été l'instigateur de ce travail et qui, par sa bienveillante attention et par des discussions fréquentes et fructueuses m'a permis de le mener à bien.

INTRODUCTION

Dans le cadre de la relativité restreinte A. Papapetrou a étudié la structure d'un champ électromagnétique $F_{\mu\nu}$ qui possède les propriétés suivantes : il est une solution retardée des équations de Maxwell, ses sources sont contenues dans un domaine fini $r < a$ de l'espace, ses composantes sont développables en série formelle de puissances de $\frac{1}{r}$:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\tilde{F}_{\mu\nu}(u, x^i/r)}{r^n}, \quad u \equiv t - r,$$

sur l'ouvert $u_1 < u < u_2$ le champ est non-radiatif, c'est à dire : $\tilde{F}_{\mu\nu}^1 = 0$. Les deux théorèmes suivants ont été démontrés pour ce champ :

A) Le coefficient $\tilde{F}_{\mu\nu}^n$ est un polynôme en u dont le degré est inférieur ou égal à $n - 2$.

B) Si le champ est stationnaire sur l'ouvert $u_1 < u < u_3$, avec $u_3 < u_2$, il est stationnaire sur $u_1 < u < u_2$.

L'analogie profonde des propriétés des champs électromagnétique et gravitationnel suggère l'existence de théorèmes analogues pour le champ gravitationnel, en relativité générale. Dans le présent travail nous démontrons ces théorèmes dans le cas non-radiatif du champ à symétrie axiale étudié par Bondi et du champ

étudié, sans hypothèse de symétrie, par Sachs et Newman-Penrose. Nous donnons ensuite des applications de ces théorèmes. Nous terminons par l'étude de la structure des transformations de Bondi-Metzner-Sachs pour le champ non-radiatif solution des équations du vide, après avoir donné quelques résultats relatifs à ces transformations.

Rappelons les hypothèses faites pour le champ gravitationnel. (Dans le cas traité par Newman-Penrose, il faut remplacer, dans ce qui suit, le champ par les fonctions du champ, à savoir : les coefficients de spin qui sont fonctions des coefficients de rotation de Ricci relatifs à un champ de repères quasi-orthonormés $(\mathcal{R})$, les composantes indépendantes du tenseur de Weyl rapportées à $(\mathcal{R})$ et les composantes des vecteurs du repère $(\mathcal{R})$ en coordonnées radiatives).

I) Il est défini sur un ouvert (Ω) d'une variété espace-temps V_4 de classe C^∞ et difféomorphe au produit topologique $R \times E^3$, E^3 étant le complémentaire d'une boule fermée euclidienne. Une famille d'hypersurfaces à un paramètre, $u = cte$, est donc définie globalement sur (Ω) . Ces hypersurfaces sont supposées caractéristiques. La congruence de normales à ces hypersurfaces est donc une congruence de géodésiques isotropes (rayons). Si r désigne un paramètre affine sur chaque rayon (utilisé par Newman-Penrose) ou le paramètre de la distance lumineuse (utilisé par Bondi, Sachs), r peut tendre vers l'infini. Des coordonnées, dites radiatives, sont utilisées : $x^0 \equiv u$, $x^1 \equiv r$, $x^2 \equiv \theta$, $x^3 \equiv \phi$.

II) Ses composantes sont développables en série formelle de puissances de $\frac{1}{r}$.

III) Il est solution des équations du vide ; cela entraîne que les séries sont au moins une fois continuellement différentiables et indéfiniment dérivables par rapport à θ , ϕ .

IV) L'espace-temps V_4 est asymptotiquement plat et le développement en $\frac{1}{r}$ du taux de dilatation ρ de la congruence de rayons débute par le terme - Dans le cas étudié par Sachs cette hypothèse se traduit par le comportement asymptotique suivant des $g_{\alpha\beta}$ non nuls :

$$\textcircled{1} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{g_{22}}{r^2} \right) = -1, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{g_{33}}{r^2} \right) = -\sin^2 \theta, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{g_{23}}{r^2} \right) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} (g_{0\alpha}) = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} (g_{00}) = 1, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{g_{0A}}{r} \right) = 0, \quad \text{avec } A = 2, 3.$$

Nous reprenons la résolution des équations du vide. Nous déterminons une solution satisfaisant les hypothèses précédentes, au moyen de données initiales sur une hypersurface caractéristique $u = \text{cte}$ et de données sur le domaine $r = \infty$. Nous utilisons de nouvelles notations mieux adaptées aux résultats que nous allons obtenir.

Nous supposons ensuite que le champ est non-radiatif sur (Ω) , c'est à dire qu'en tout point $x \in \Omega$ les composantes du tenseur de courbure par rapport au champ de repères orthonormés de Bondi ou au champ de repères $(\mathcal{R})$ ne contiennent pas de terme proportionnel à $\frac{1}{r}$ (Dans la notation de Bondi cette hypothèse est équivalente à $C_{00} = 0$). Cette définition du champ non-radiatif est imposée par le fait qu'il n'y a pas de perte d'énergie par rayonnement si et seulement si, un tel terme n'existe pas. La structure des solutions du vide donne l'analogue du théorème A) pour le cas de Bondi et Sachs :

Si le champ est non radiatif sur (Ω) , les coefficients des puissances de $\frac{1}{r}$ du développement des composantes du tenseur métrique et du tenseur de courbure sont des polynômes de la variable u . Si $g_{\mu'\nu'}$ et $R_{\mu'\nu'\rho'\sigma'}$ désignent les composantes de ces tenseurs par rapport au champ de repères $(\mathcal{R})$ leur développement s'écrit :

$$g_{\mu'\nu'} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{n}{g}_{\mu'\nu'}}{r^n}, \quad R_{\mu'\nu'\rho'\sigma'} = \frac{1}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{n}{R}_{\mu'\nu'\rho'\sigma'}}{r^n},$$

où les $\overset{n}{g}_{\mu'\nu'}$, $\overset{n}{R}_{\mu'\nu'\rho'\sigma'}$ sont des polynômes en u dont le degré est au plus égal à n .

Nous obtenons aussi l'analogue du théorème A) pour le cas étudié par Newman-Penrose :

Si le champ est non radiatif sur (Ω) les coefficients des puissances de $\frac{1}{r}$ du développement des fonctions du champ sont des polynômes en u .

Nous démontrons ensuite l'analogue du théorème B pour le champ gravitationnel non-radiatif :

Si le champ est non-radiatif sur l'ouvert $u_1 < u < u_2$ et stationnaire sur l'ouvert $u_1 < u < u_3$, avec $u_3 < u_2$, il est stationnaire sur $u_1 < u < u_2$.

Nous donnons des applications de ces théorèmes.

Nous mettons en évidence l'existence de champs qui sont à la fois non-radiatifs

et non-stationnaires. Nous donnons des exemples de tels champs en relativité restreinte pour le champ électromagnétique. Nous suggérons un exemple en relativité générale dans le cadre de la première approximation pour champs faibles.

Ces théorèmes nous permettent également d'obtenir les conclusions suivantes :

a) la quantité C_0 de Bondi n'est pas tout à fait suffisante pour décrire en détail le rayonnement gravitationnel ; b) le champ créé par des corps en mouvement purement gravitationnel est "radiatif".

Les relations de définition d'un champ non-radiatif, et d'un champ non-radiatif et non-stationnaire sont invariantes dans une transformation de Bondi-Metzner-Sachs.

Nous donnons ensuite quelques résultats relatifs aux transformations de Bondi-Metzner-Sachs. Rappelons la définition de ces transformations : ce sont les changements de coordonnées radiatives en nouvelles coordonnées radiatives

$\bar{u}, \bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\phi}$ qui conservent les hypothèses II et IV. L'existence de ces transformations, dans le cas où elles sont développables en série formelle de puissances de $\frac{1}{r}$, a été démontrée par Bondi-Metzner et Sachs. Pour ces dernières, nous démontrons par quelles puissances de $\frac{1}{r}$ débute leur développement, ceci indépendamment du comportement asymptotique (1) et (2) du tenseur métrique. Nous écrivons les développements d'une transformation de Bondi-Metzner-Sachs sous la forme :

$$(3) \quad u = \bar{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{u}_n}{\bar{r}^n}, \quad r = \bar{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{r}_n}{\bar{r}^n}, \quad \theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{\theta}_n}{\bar{r}^n}, \quad \phi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{\phi}_n}{\bar{r}^n}$$

où les $\bar{u}_n, \bar{r}_n, \bar{\theta}_n, \bar{\phi}_n$ sont des fonctions des variables $\bar{u}, \bar{\theta}, \bar{\phi}$ de classe C^{∞} . Dans le cas de Sachs, on a

$$(4) \quad \begin{aligned} \hat{u} &= \frac{1}{\hat{r}} [\bar{u} + \alpha(\bar{\theta}, \bar{\phi})] \\ \hat{\theta} &= \hat{\theta}(\bar{\theta}, \bar{\phi}) \\ \hat{\phi} &= \hat{\phi}(\bar{\theta}, \bar{\phi}), \end{aligned}$$

où $\alpha(\bar{\theta}, \bar{\phi})$ est une fonction arbitraire de $\bar{\theta}, \bar{\phi}$ de classe C^{∞} , où $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\bar{\theta}, \bar{\phi})$ et $\hat{\phi} = \hat{\phi}(\bar{\theta}, \bar{\phi})$ sont les transformations conformes sur la sphère unité à 2 dimensions et où $\hat{r}$ est défini par :

$$(\hat{r})^4 = \frac{\sin^2 \bar{\theta}}{\left(\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \bar{\theta}} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \bar{\phi}} - \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \bar{\phi}} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \bar{\theta}} \right)^2 \sin^2 \bar{\theta}}.$$

Nous démontrons le théorème :

Pour qu'un changement de coordonnées radiatives ait pour limite la transformation (4) quand $r \rightarrow \infty$ il faut et il suffit que ce changement de coordonnées laisse invariant le comportement asymptotique du tenseur métrique (1) et

$$(5) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{g_{\alpha\alpha}}{r^2} \right) = 0 = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{g_{0A}}{r^2} \right) \quad \text{avec } A=1,2.$$

Nous prouvons alors l'existence d'un changement de coordonnées (T') qui comprend comme cas particulier les transformations de Bondi-Metzner-Sachs. La définition des changements de coordonnées (T') est celle des transformations de Bondi-Metzner-Sachs dans laquelle le comportement asymptotique (1), (2) est remplacé par le comportement asymptotique plus général (1), (5). Nous pensons que l'existence de ces changements de coordonnées (T') est intéressante bien que ce comportement asymptotique ne présente pas un intérêt physique. La démonstration exige que le tenseur métrique et les changements de coordonnées soient de classe C^∞ sur (Ω) .

Enfin dans le cas où le tenseur métrique satisfait les équations du vide, nous établissons le théorème :

Dans le cas d'un champ non-radiatif les coefficients $\bar{u}, \bar{\theta}, \bar{r}, \bar{\phi}$ du développement (3) sont des polynômes de la variable u dont le degré est au plus égal à n .

Trois articles constituent ce travail. Le premier article traite le cas du champ à symétrie axiale et symétrie par réflexion introduit par Bondi. Des exemples de champs à la fois non-stationnaires et non-radiatifs sont donnés, ainsi que des conséquences de l'existence de ces champs. Le deuxième article traite le cas du champ sans hypothèse de symétrie et les transformations de Bondi-Metzner-Sachs. Dans le troisième article on étudie la structure du champ gravitationnel non-radiatif dans le formalisme de Newman-Penrose.

1er article : La structure du champ gravitationnel non-radiatif en relativité générale, par I. Moret-Bailly et A. Papapetrou, Ann. Inst. Henri Poincaré, vol. VI, n°3, 1967, p. 205-218.

2e article : Structure du champ gravitationnel non-radiatif, sans hypothèse de symétrie, en relativité générale, par I. Moret-Bailly, Ann. Inst. Henri Poincaré Vol. IX, n° 4, 1968, p. 395-439.

3e article : Structure du champ gravitationnel non-radiatif dans le formalisme de Newman-Penrose, par I. Moret-Bailly, Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol XI, n° 4, 1969, p. 415-438.

La structure du champ gravitationnel « non-radiatif » en relativité générale

par

I. MORET-BAILLY et A. PAPAPETROU
(Institut Henri Poincaré).

RÉSUMÉ. — Ce travail établit deux théorèmes valables pour le champ gravitationnel « non-radiatif ». Deux théorèmes analogues ont déjà été démontrés pour le champ électromagnétique en relativité restreinte. La démonstration explicite est faite dans le cas du champ à symétrie axiale étudié par Bondi.

A l'aide de ces théorèmes les conclusions suivantes ont été obtenues : a) la quantité c_0 de Bondi n'est pas suffisante pour décrire en détail le rayonnement gravitationnel; b) le champ créé par des corps en mouvement purement gravitationnel doit être « radiatif ».

SUMMARY. — In this work two theorems concerning non-radiative gravitational fields will be derived. They are the analogue of two theorems valid for the electromagnetic field in special relativity. The demonstration will be given in detail for the axially symmetric gravitational field studied by Bondi.

From these theorems the following conclusions will be obtained: a) the quantity c_0 of Bondi is not sufficient to describe gravitational radiation in detail; b) bodies in a purely gravitational motion must be the sources of a radiative gravitational field.

1. — INTRODUCTION

Dans le cadre de la relativité restreinte, considérons un champ électromagnétique $F_{\mu\nu}$ qui possède les propriétés suivantes :

- a) Il est une solution retardée des équations de Maxwell.
- b) Ses sources sont contenues dans un domaine fini, $r < a$, de l'espace.

c) Ses composantes $F_{\mu\nu}$ sont développables en séries entières de $\frac{1}{r}$:

$$F_{\mu\nu} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(u, x^i/r)}{r^n}, \quad u \equiv t - r.$$

d) Dans le domaine $u_1 < u < u_2$ le champ est « non-radiatif », c'est-à-dire :

$$(1) \quad \overset{1}{F}_{\mu\nu} = 0, \quad \text{pour} \quad u_1 < u < u_2.$$

En utilisant les équations de Maxwell sous la forme

$$(2) \quad \square F_{\mu\nu} = 0,$$

on a montré [1] pour ce champ les théorèmes suivants :

(A) Le coefficient $\overset{n}{F}_{\mu\nu}$ est un polynôme en u dont le degré est inférieur ou égal à $n - 2$.

(B) Si le champ est stationnaire dans une partie de l'intervalle $u_1 < u < u_2$, il est stationnaire dans la totalité de cet intervalle.

L'analogie profonde des propriétés des champs électromagnétique et gravitationnel suggère l'existence de théorèmes analogues pour le champ gravitationnel. En effet, on a pu montrer [1] que, dans le cas d'un champ gravitationnel retardé et « non-radiatif », il n'y a pas d'ondes de choc. Ce résultat est en accord avec le théorème (B), mais plus faible que ce théorème.

Dans le présent travail nous nous proposons de démontrer un théorème (A') pour le champ gravitationnel analogue au théorème (A). En utilisant ce résultat nous démontrerons alors que le théorème (B) est également valable pour le champ gravitationnel.

Rappelons brièvement les hypothèses et définitions que nous utilisons. Le champ gravitationnel retardé a la forme indiquée par Bondi [2] [3] quand on utilise ses coordonnées « radiatives ». Nous supposons que, pour $r > a$, ce champ satisfait les équations d'Einstein du vide et que les composantes $g_{\mu\nu}$ du tenseur métrique sont développables en séries entières de $\frac{1}{r}$. Nous dirons que le champ est « non-radiatif » si les développements des composantes du tenseur de courbure :

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overset{n}{R}_{\mu\nu\rho\sigma}}{r^n}$$

ne contiennent pas de termes proportionnels à $\frac{1}{r}$:

$$(3) \quad R_{\mu\nu\rho\sigma}^1 = 0.$$

Dans le cas considéré par Bondi [3] et avec la notation qu'il utilise, la condition (3) est équivalente à

$$(4) \quad c_{00} = 0.$$

Nous allons traiter en détail le cas de la symétrie axiale considérée par Bondi [3]. La même méthode sera appliquée prochainement au cas général traité par Sachs [4] et Newman, Penrose et Unti [7].

2. — LA STRUCTURE DES ÉQUATIONS DU CHAMP

Dans ce paragraphe nous ne faisons pas l'hypothèse (4). Nous reprenons l'étude de la structure des équations d'Einstein du vide traitée dans [3] avec de légères modifications dans la notation des développements en séries des $g_{\mu\nu}$, ceci pour des raisons qui paraîtront évidentes ultérieurement. Nous écrivons les développements de γ et β sous la forme :

$$(5) \quad \gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{r^n},$$

$$(6) \quad \beta = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\beta_n}{r^n}.$$

Nous remplaçons les développements de U et de V par ceux de

$$(7) \quad \mathcal{U} \equiv rU, \quad \mathcal{V} \equiv \frac{V}{r},$$

$$(8) \quad \mathcal{U} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{U}_n}{r^n}, \quad \mathcal{V} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{V}_n}{r^n}.$$

Rappelons que les γ_n , β_n , $\mathcal{U}_n$, $\mathcal{V}_n$ sont des fonctions des variables $x^0 = u$, $x^2 = \theta$. Les coefficients γ_n du développement de γ joueront le rôle principal

dans l'étude des équations du champ. Nous construirons avec ces γ^n certaines fonctions que nous appellerons fonctions ψ . Leur introduction dans les calculs simplifie ceux-ci de façon appréciable.

Définition d'une fonction ψ : c'est une série entière de $\frac{1}{r}$,

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi^n}{r^n},$$

dont le coefficient ψ^n de $\frac{1}{r^n}$ est, pour $n \geq 1$, une somme de produits tels que

$$a \cdot \overset{i_1}{\Gamma} \cdot \overset{i_2}{\Gamma} \dots \overset{i_j}{\Gamma} \dots \overset{i_p}{\Gamma}, \quad \text{avec} \quad i_1 + i_2 + \dots + i_j + \dots + i_p = n,$$

où a est une fonction de la variable θ seule et où Γ est, soit $\overset{i_j}{\gamma}$, soit $\overset{i_j}{\gamma_2} \equiv \frac{\partial \gamma}{\partial \theta}$,

soit $\overset{i_j}{\gamma_{22}} \equiv \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \theta^2}$. Pour $n = 0$, ψ se réduit à une fonction de la variable θ seule.

L'addition, la multiplication, la dérivation des séries donnent les résultats suivants :

La somme de fonctions ψ est une fonction ψ . Le produit de fonctions ψ est une fonction ψ . La dérivée partielle d'ordre p (si elle existe) par rapport à la variable θ d'une fonction ψ est une fonction ψ . La dérivée partielle d'ordre p par rapport à r d'une fonction ψ est le produit d'une fonction ψ par $\frac{1}{r^p}$.

Remarquons, comme première application de cette définition que γ , γ_2 , e^γ sont des fonctions ψ .

Nous utilisons les équations du champ de [3]. Nous considérons d'abord la première équation principale, équation (22) de [3],

$$(9) \quad \beta_1 = \frac{1}{2} r \gamma_1^2$$

En introduisant (5) et (6) dans (9) et en identifiant les coefficients des puissances successives de $\frac{1}{r}$ on trouve

$$(10) \quad \beta^{n+1} = -\frac{1}{2(n+1)} \sum_{i+j=n+1} i j \gamma \gamma, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ceci signifie que β est une fonction ψ , bien déterminée par la donnée de γ , que nous écrivons :

$$(10') \quad \beta = {}_a\psi.$$

La deuxième équation principale, équation (23) de [3], s'écrit, avec (7),

$$(11) \quad \left[r^3 e^{2(\gamma-\beta)} \left({}^1\mathcal{U}_1 - \frac{{}^1\mathcal{U}}{r} \right) \right]_1 = 2r^2 \left[\beta_{12} - \gamma_{12} + 2\gamma_1\gamma_2 - \frac{2\beta_2}{r} - 2\gamma_1 \cotg \theta \right].$$

En utilisant les propriétés des fonctions ψ on trouve que le second membre (II) de cette dernière équation est le produit d'une fonction ψ par r dont l'expression est obtenue en introduisant (5), (6) et (10) dans (11)

$$(II) \equiv {}^1_2\gamma + 4\gamma \cotg \theta + \frac{{}^3_6\gamma_2 + 12\gamma \cotg \theta}{r^2} + \dots$$

Le début du développement du premier membre (I) de (11) s'écrit en utilisant (5), (8), (6) et (10)

$$(I) \equiv -2{}^1\mathcal{U} + \frac{{}^3_4\mathcal{U} + 3{}^2_1\mathcal{U}_\rho + 2{}^1_2\mathcal{U}_\rho}{r^2} + \dots$$

où ρ est une fonction ψ déterminée par la donnée de γ :

$$\rho \equiv e^{2(\gamma-\beta)} \equiv 1 + \frac{{}^1_\rho}{r} + \frac{{}^2_\rho}{r^2} + \dots,$$

où

$${}^1_\rho \equiv 2\gamma, \quad {}^2_\rho \equiv \frac{5}{2}({}^1_\gamma)^2; \dots$$

Par identification des coefficients des puissances successives de $\frac{1}{r}$ dans (I) et (II) on déduit que

a) Seul le coefficient ${}^2_1\mathcal{U}$ du développement de ${}^1\mathcal{U}$ n'est pas déterminé par (11).

b) ${}^n_\mathcal{U}$, pour $n \neq 2$, est égal à une somme de termes de deux types. Les premiers ne contiennent que des ${}^n_\gamma$, avec $i \leq n$, et forment le coefficient ${}^n_b\psi$ d'une fonction ${}_b\psi$ bien déterminée par la donnée de γ . Les autres contiennent ${}^2_\mathcal{U}$ en facteur et des ${}^i_\gamma$, avec $i \leq n-2$, qui font apparaître le coeffi-

cient ψ_c^{n-2} d'une autre fonction ψ_c déterminée par la donnée de γ . On trouve par exemple,

$$\begin{aligned}\mathfrak{U} &= -(\gamma_2 + 2\gamma \cotg \theta), \\ \mathfrak{U} &= \frac{3}{2}\gamma_2^3 + 3\gamma \cotg \theta + \frac{1}{2}(\gamma_2 + 2\gamma \cotg \theta)^2 - \frac{3}{4}\mathfrak{U}_\rho.\end{aligned}$$

La formule générale est

$$(12) \quad \mathfrak{U} = \psi_b^n + \mathfrak{U}_c^2 \psi_c^{n-2}.$$

Ce que l'on peut aussi écrire sous la forme

$$(12') \quad \mathfrak{U} = \psi_b + \frac{\mathfrak{U}_c^2}{r^2} \psi_c.$$

La troisième équation principale, équation (24) de [3], s'écrit, en tenant compte de (7),

$$\begin{aligned}(13) \quad (2\mathfrak{U} + r\mathfrak{U}_1) &= -\frac{1}{2}e^{2(\gamma-\beta)}(r^2\mathfrak{U}_1^2 - 2r\mathfrak{U}_1\mathfrak{U} + \mathfrak{U}^2) \\ &+ r\mathfrak{U}_{12} + r\mathfrak{U}_1 \cotg \theta + 3\mathfrak{U}_2 + 3\mathfrak{U} \cotg \theta \\ &+ 2e^{2(\beta-\gamma)}[1 + 3(\gamma_2 - \beta_2) \cotg \theta + \gamma_{22} - \beta_{22} - \beta_2^2 - \gamma_2(\gamma_3 - \beta_2)]\end{aligned}$$

Après l'introduction de (5), (8), (12), (6) et (10) dans (13), l'identification des coefficients des puissances successives de $\frac{1}{r}$ de chaque membre de l'équation montre que celle-ci ne détermine pas le coefficient $\mathfrak{U}_1$; mais elle détermine tous les autres coefficients $\mathfrak{U}_i^n$ en fonction de $\mathfrak{U}$ et des γ_i avec $i \leq n$, le résultat étant donné par la formule

$$(14) \quad \mathfrak{U}_d^n = \psi_d^n + \mathfrak{U}_e^2 \psi_e^{n-2} + \mathfrak{U}_f^2 \psi_f^{n-2} + (\mathfrak{U}_g^2)^2 \psi_g^{n-4}$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$(14') \quad \mathfrak{U} = \frac{\mathfrak{U}_d}{r} + \psi_d + \frac{\mathfrak{U}_e^2}{r^2} \psi_e + \frac{\mathfrak{U}_f^2}{r^2} \psi_f + \frac{(\mathfrak{U}_g^2)^2}{r^4} \psi_g$$

où $\psi_d, \psi_e, \psi_f, \psi_g$ sont quatre fonctions ψ déterminées par la donnée de γ .

Considérons maintenant la quatrième équation principale, équation (25) de [3] qui, avec (7), s'écrit

$$(15) \quad 2r(r\gamma)_{01} = r\mathcal{U}_1(r\gamma_1 - 1) + r\mathcal{U}_1(\cotg \theta - \gamma_2) \\ + \mathcal{V}(r^2\gamma_{11} + 2r\gamma_1 - 1) + \mathcal{U}_2(1 - r\gamma_1) \\ + \mathcal{U}(-2r\gamma_{12} - r\gamma_1 \cotg \theta - \gamma_2 + 2 \cotg \theta) \\ + e^{2(\beta-\gamma)}[1 + (3\gamma_2 - 2\beta_2) \cotg \theta + \gamma_{22} - 2\gamma_2(\gamma_3 - \beta_2)]$$

L'introduction de (5), (10'), (12'), (14') dans (15) et l'identification des coefficients des puissances successives de $\frac{1}{r}$ de chaque membre de cette équation

donnent, pour $n > 0$, les $\gamma_0^{n+1} \equiv \frac{\partial \gamma}{\partial u}$ en fonction des γ , avec $i \leq n$, $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$:

$$(16) \quad -2n \gamma_0^{n+1} = \psi_h^n + \mathcal{V} \psi_i^{n-1} + \mathcal{U} \psi_j^{n-2} + \mathcal{U}_2 \psi_k^{n-2} + (\mathcal{U})^2 \psi_l^{n-4}, \quad \text{avec } n > 0,$$

où les $\psi_h^n, \psi_i^n, \psi_j^n, \psi_k^n, \psi_l^n$ sont les coefficients de $\frac{1}{r^n}$ de cinq fonctions ψ construites avec les fonctions ψ qui interviennent dans (10'), (12'), (14'). Ces coefficients sont bien déterminés par la donnée des $\gamma, i \leq n$.

Soulignons que γ_0^1 n'est pas déterminé par (15). En faisant $n = 1, 2, 3, \dots$ successivement dans (16), on obtient les γ^i avec $i \neq 1$, par intégration par rapport à u .

Nous sommes ainsi arrivés au résultat suivant :

Les quatre équations principales déterminent les $\gamma^i, \beta^i, \mathcal{U}^i, \mathcal{V}^i$ exceptés $\gamma^1, \mathcal{U}^2, \mathcal{V}^1$; mais seul γ^1 est arbitraire car $\mathcal{U}^2$ et $\mathcal{V}^1$ doivent satisfaire les deux équations du champ « supplémentaires », équations (35) et (36) de [3], qui s'écrivent, compte tenu de (7),

$$(17) \quad \mathcal{V}_0^1 = 2(\gamma_0^1)^2 - (\gamma_{22}^1 + 3\gamma_2^1 \cotg \theta - 2\gamma_0^1),$$

$$(18) \quad 3\mathcal{U}_0^2 = \mathcal{V}_2^1 + 3\gamma\gamma_{02}^{11} + 7\gamma_0^1\gamma_2^1 + 16\gamma\gamma_0^1 \cotg \theta$$

Quand on a choisi γ^1 , le deuxième membre de (17) est connu et par conséquent cette équation détermine le coefficient $\mathcal{V}^1$ après intégration par rapport à u . Mais alors le deuxième membre de (18) est aussi connu et cette dernière équation détermine $\mathcal{U}^2$.

3. — LE CAS DU CHAMP « NON-RADIATIF »

Nous supposons maintenant que le champ gravitationnel est « non-radiatif », c'est-à-dire que nous faisons l'hypothèse (4) qui, ici, se traduit avec la notation $\overset{1}{\gamma} \equiv c$ par

$$(19) \quad \frac{\partial^2}{\partial u^2} \overset{1}{\gamma} = 0$$

ce qui entraîne que $\overset{1}{\gamma}$ est un polynôme en u de degré un au plus :

$$\overset{1}{\gamma} = A(\theta)u + B(\theta).$$

On déduit de (19), (17), (18) que

$$(20) \quad \frac{\partial^2}{\partial u^2} \overset{1}{\mathcal{U}} = 0, \quad \frac{\partial^3}{\partial u^3} \overset{2}{\mathcal{U}} = 0.$$

(19) et la définition de $\overset{i}{\psi}$ entraînent $\frac{\partial}{\partial u} \overset{0}{\psi} = 0$, $\frac{\partial^2}{\partial u^2} \overset{1}{\psi} = 0$, car $\overset{1}{\psi}$ est linéaire par rapport à $\overset{1}{\gamma}$, et $\frac{\partial^3}{\partial u^3} \overset{2}{\psi} = 0$, car $\overset{2}{\gamma}$ étant nul, u n'apparaît que dans $\overset{1}{\gamma}$ qui figure au carré dans $\overset{2}{\psi}$.

On fait maintenant $n = 2$ dans (16). On prend la dérivée troisième par rapport à u de chaque membre et on obtient compte tenu de ce qui précède :

$$\frac{\partial^4}{\partial u^4} \overset{3}{\gamma} = 0, \quad \text{ce qui entraîne} \quad \frac{\partial^4}{\partial u^4} \overset{3}{\psi} = 0.$$

En répétant les mêmes opérations pour $n = 3, 4, \dots$ dans (16) on obtient le résultat suivant :

$$(21) \quad \frac{\partial^{n+1}}{\partial u^{n+1}} \overset{n}{\gamma} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^{n+1}}{\partial u^{n+1}} \overset{n}{\psi} = 0.$$

Finalement on déduit des résultats précédents et de (12) et (14)

$$(22) \quad \frac{\partial^{n+1}}{\partial u^{n+1}} \overset{n}{\mathcal{U}} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^{n+1}}{\partial u^{n+1}} \overset{n}{\mathcal{V}} = 0.$$

Nous obtenons donc la conclusion suivante :

Dans le cas d'un champ « non-radiatif » les $\overset{n}{\gamma}$, $\overset{n}{\beta}$, $\overset{n}{\mathcal{U}}$, $\overset{n}{\mathcal{V}}$, des développements de γ , β , $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, sont des polynômes en u dont le degré est inférieur ou égal à n .

Les composantes non nulles du tenseur métrique sont données par l'équation (14) de [3]. Écrites en fonction de γ , β , $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ elles sont :

$$(23) \quad \begin{aligned} g_{00} &= \mathcal{V}e^{2\beta} - \mathcal{U}^2e^{2\gamma} & , & \quad g_{01} = e^{2\beta} & , & \quad g_{02} = r\mathcal{U}e^{2\gamma} \\ g_{22} &= -r^2e^{2\gamma} & , & \quad g_{33} = -r^2e^{-2\gamma} \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Les quantités $e^{2\gamma}$, $e^{-2\gamma}$, $e^{2\beta}$ étant des fonctions ψ et les $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, ayant les développements de (12') et de (14') on voit immédiatement que les composantes $g_{\alpha\beta}$ ont les développements suivants :

$$(24) \quad \left. \begin{aligned} g_{ik} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_{ik}^{(n)}}{r^n} \\ g_{iA} &= r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_{iA}^{(n)}}{r^n} \\ g_{AB} &= r^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_{AB}^{(n)}}{r^n} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &i, k = 0, 1; \\ &A, B = 2, 3. \end{aligned}$$

Si le champ est « non-radiatif » chacune des quantités $e^{2\gamma}$, $e^{-2\gamma}$, $e^{2\beta}$, $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ a, d'après (21) et (22), la propriété suivante : dans le développement par rapport à $\frac{1}{r}$ le coefficient de $\frac{1}{r^n}$ est un polynôme en u dont le degré est inférieur ou égal à n . On vérifie immédiatement que cette propriété est valable aussi pour le produit de deux quelconques de ces quantités. On arrive ainsi au théorème (A') suivant :

Si le champ est « non-radiatif » les coefficients $g_{\alpha\beta}^{(n)}$ sont des polynômes en u dont le degré est inférieur ou égal à n .

Nous avons vu que, dans le cas d'un champ non-radiatif, le coefficient γ est un polynôme en u dont le degré est un ou zéro. Ce degré est invariant par rapport aux transformations de Bondi-Metzner, comme le montre immédiatement la première formule de la page 51 de [3]. Les degrés par rapport à u des autres coefficients de la métrique ne sont pas en général invariants. En effet, considérons le champ de Schwarzschild d'abord avec un système de coordonnées de Bondi dans lequel les $g_{\mu\nu}$ sont indépendants de u . Tous les $g_{\alpha\beta}^{(n)}$ sont dans ce cas des polynômes en u dont le degré est zéro. Mais, après une transformation de Bondi-Metzner correspondant à une transformation de Lorentz, la métrique dépend de u et par conséquent les coefficients $g_{\alpha\beta}^{(n)}$ ne sont plus tous de degré zéro. Il s'ensuit que le champ

est nécessairement non-stationnaire quand le degré de γ^I est un. Mais il peut être stationnaire ⁽¹⁾ ou non-stationnaire quand le degré de γ^I est zéro.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème (B) pour le champ gravitationnel. Nous supposons que le champ est « non-radiatif » dans l'intervalle

$$(\alpha) \quad u_1 < u < u_2,$$

et stationnaire dans l'intervalle

$$(\beta) \quad u_1 < u < u'_2, \quad \text{avec} \quad u'_2 < u_2.$$

Nous pouvons introduire un système de coordonnées de Bondi tel que les $g_{\mu\nu}$ soient indépendants de u dans l'intervalle (β) . Le champ étant « non-radiatif » dans (α) , les coefficients $g_{\mu\nu}^n$ sont dans cet intervalle des polynômes en u . Mais le champ est indépendant de u dans la partie (β) de (α) et par conséquent le degré de tous ces polynômes est zéro : le champ est donc stationnaire dans l'intervalle (α) , ce qui constitue le théorème (B) pour le champ gravitationnel.

On peut arriver au même résultat par le raisonnement suivant. Un champ « non-radiatif » dépend, d'après le théorème (A'), de la coordonnée u par l'intermédiaire des fonctions élémentaires u^λ , $\lambda = 0, 1, 2, \dots$. Il s'ensuit qu'au passage d'un champ stationnaire à un champ non-stationnaire, il y aurait nécessairement une onde de choc. Mais il a été déjà démontré qu'il n'y a pas d'onde de choc dans le cas d'un champ « non-radiatif », ce qui redonne le théorème (B).

4. — LES CHAMPS NON-STATIONNAIRES ET « NON-RADIATIFS » : EXEMPLES ET APPLICATIONS

Nous donnerons deux exemples de champs électromagnétiques de ce type. L'utilité de ces exemples consiste en ce qu'ils nous donnent une idée des propriétés caractéristiques de tels champs.

⁽¹⁾ Le champ gravitationnel est dit stationnaire dans un domaine de la variété espace-temps s'il existe, dans ce domaine, un champ de vecteurs de Killing orientés dans le temps.

On a d'après (1) et (2)

$$\overset{1}{F}_{\mu\nu} = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial u} \overset{2}{F}_{\mu\nu} = 0 \quad , \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4.$$

a) Le champ le plus simple ⁽²⁾ est celui pour lequel on a

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} \overset{3}{F}_{\mu\nu} = 0 \quad , \quad \overset{n}{F}_{\mu\nu} = 0 \quad \text{pour } n > 3$$

Un tel champ est créé par un dipôle électrique dont le moment croît linéairement avec le temps. En choisissant pour direction de l'axe Oz celle du dipôle, on trouve, par un calcul élémentaire :

$$\begin{aligned} F_{12} &= 0 \quad , \quad F_{23} = \frac{\alpha y}{r} \cdot \frac{1}{r^2} \quad , \quad F_{31} = \frac{-\alpha x}{r} \cdot \frac{1}{r^2}, \\ (25) \quad F_{14} &= \frac{-3\alpha xz}{r^2} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{t-r}{r^3} \right) \quad , \quad F_{24} = \frac{-3\alpha yz}{r^2} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{t-r}{r^3} \right), \\ F_{34} &= \alpha \left(1 - \frac{3z^2}{r^2} \right) \left(\frac{1}{r^2} + \frac{t-r}{r^3} \right), \end{aligned}$$

où α est une constante. Le potentiel A_μ correspondant est

$$A_1 = A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = -\alpha \cdot \frac{1}{r} \quad , \quad A_4 = \alpha \cdot \frac{z}{r} \left(\frac{1}{r} + \frac{t-r}{r^2} \right).$$

Il est facile de trouver la distribution des sources correspondante. Considérons deux charges ponctuelles $Q_1 = \beta t$ et $Q_2 = -\beta t$ aux points $M_1\left(0, 0, \frac{l}{2}\right)$ et $M_2\left(0, 0, -\frac{l}{2}\right)$. Pour satisfaire la loi de conservation des charges nous devons introduire encore un courant d'intensité β sur le segment (M_2M_1) . Si on fait tendre β vers l'infini et l vers zéro de manière que $\beta l = \alpha$, on vérifie immédiatement que c'est cette distribution de sources qui produit le champ (25).

b) On obtient un champ « non-radiatif » tel que

$$\frac{\partial^3}{\partial u^3} \overset{4}{F}_{\mu\nu} = 0 \quad , \quad \overset{n}{F}_{\mu\nu} = 0 \quad , \quad \text{pour } n > 4,$$

⁽²⁾ L'exemple le plus simple d'un champ non-stationnaire et « non-radiatif » est donné par le champ créé par deux particules chargées en mouvement avec des vitesses constantes et inégales. Mais dans ce cas les sources du champ ne sont pas contenues, pour toutes les valeurs de t , dans une région finie $r < a$.

en considérant quatre charges, $Q_1 = Q_2 = \beta t^2$, $Q_3 = Q_4 = -\beta t^2$, aux points

$$M_1\left(0, \frac{l_1}{2}, \frac{l_2}{2}\right), \quad M_2\left(0, -\frac{l_1}{2}, -\frac{l_2}{2}\right), \quad M_3\left(0, -\frac{l_1}{2}, \frac{l_2}{2}\right), \quad M_4\left(0, \frac{l_1}{2}, -\frac{l_2}{2}\right),$$

et deux courants d'intensité $2\beta t$ sur les segments (M_4M_1) et (M_3M_2) . Il y a donc dans ce cas un quadropôle proportionnel à t^2 et une distribution de dipôles proportionnelle à t . D'une manière analogue on peut construire des champs électromagnétiques « non-radiatifs » contenant des puissances de plus en plus élevées.

On doit s'attendre à des situations analogues pour le champ gravitationnel en relativité générale, mais on ne peut pas donner d'exemples exacts. Nous ne citerons que le cas le plus simple dans le cadre de la première approximation pour champs faibles. C'est le champ gravitationnel produit par une distribution matérielle telle qu'il y a un moment quadropolaire d^{ik} proportionnel à t^3 . En effet on trouve [5] que, si $\ddot{d}^{ik}$ n'est pas nul mais indépendant du temps, le terme de $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ qui est proportionnel à $\frac{1}{r}$ s'annule, c'est-à-dire que le champ est « non-radiatif » ⁽³⁾. Il s'agit du cas (4), $c_{00} = 0$, mais avec $c_0 \neq 0$.

Les équations du champ électromagnétique ou gravitationnel admettent des solutions qui peuvent être « non-radiatives » dans l'intervalle infini $-\infty < u < +\infty$. Ces solutions deviennent singulières sur les hypersurfaces $u = \pm\infty$ et sont par conséquent inadmissibles au point de vue physique. Les exemples que nous venons de citer montrent qu'on pourrait éventuellement réaliser des distributions de sources produisant des champs « non-radiatifs », mais seulement pendant un intervalle de temps fini

$$(\gamma) \quad u_1 < u < u_2.$$

On arrive à des conclusions intéressantes en supposant que dans cet intervalle on a $c_{00} = 0$ mais $c_0 \neq 0$. Nous supposons encore qu'en dehors de l'intervalle

$$(\delta) \quad u'_1 < u < u'_2, \quad \text{avec} \quad u'_1 < u_1, \quad u_2 < u'_2,$$

⁽³⁾ Dans le cas électromagnétique le moment quadropolaire est proportionnel à t^2 . La différence s'explique par le fait que le rôle de $F_{\mu\nu}$ est maintenant pris par $R_{\mu\nu\rho\sigma}$; $F_{\mu\nu}$ contient les dérivées premières de A_μ , tandis que $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ contient les dérivées secondes de $g_{\mu\nu}$.

le champ est stationnaire. On a donc $c_0 = 0$ pour $u \leq u'_1$ et pour $u'_2 \leq u$. Il s'ensuit que $c_{00} \neq 0$ dans chacun des deux intervalles

$$(\epsilon) \quad u'_1 < u \leq u_1 \quad \text{et} \quad u_2 \leq u < u'_2.$$

Le champ est donc nécessairement « radiatif » dans les intervalles (ϵ) , c'est-à-dire que le développement de $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ a un terme proportionnel à $\frac{1}{r}$ dans chacun des intervalles (ϵ) , tandis qu'il commence avec un terme proportionnel à $\frac{1}{r^2}$ dans l'intervalle (γ) et avec un terme proportionnel à $\frac{1}{r^3}$ dans les intervalles $u \leq u'_1$ et $u'_2 \leq u$. Ceci signifie que le rayonnement gravitationnel est émis essentiellement dans les intervalles (ϵ) . Cette remarque montre que la quantité c_0^2 n'est appropriée que pour le calcul de l'énergie *totale* du rayonnement gravitationnel émis dans l'intervalle (ϵ) où le champ est variable. Mais c_0^2 ne peut décrire la *distribution détaillée* du rayonnement dans cet intervalle. Cette distribution est évidemment décrite d'une manière satisfaisante par la quantité c_{00} . Mais nous nous trouvons en face de la difficulté caractéristique : cette dernière quantité ne peut pas déterminer l'énergie du rayonnement.

Les résultats déduits de l'analyse des champs « non-radiatifs » nous permettent d'arriver immédiatement à une autre conclusion intéressante. Un champ gravitationnel « non-radiatif » ne peut pas être engendré par des sources en mouvement purement gravitationnel [6]. En effet il suffit de considérer le cas d'une étoile double, dont les composantes ont des vitesses telles que dans la théorie newtonienne de la gravitation les trajectoires soient elliptiques. Il n'y a pas de doute que ce champ est décrit en relativité générale par des fonctions $g_{\mu\nu}$ presque périodiques en u . Cela entraîne que les coefficients du développement des $g_{\mu\nu}$ sont aussi des fonctions presque périodiques en u . Il est donc impossible que ces coefficients soient des polynômes en u : le champ est nécessairement « radiatif » bien que ces sources soient en mouvement purement gravitationnel. Le même raisonnement montre d'ailleurs qu'on ne doit pas s'attendre à ce que les champs gravitationnels « non-radiatifs » soient engendrés par des sources obéissant à des équations d'état réversibles [3].

RÉFÉRENCES

- [1] A. PAPAPETROU, *J. Math. Phys.*, Vol. 6, n° 9, septembre 1965, p. 1405.
- [2] H. BONDI, *Nature*, London, Vol. 186, p. 535.
- [3] H. BONDI, M. VAN DER BURG et A. METZNER, *Proc. Roy. Soc.*, t. A 269, 1962, p. 21.

- [4] R. SACHS, *Proc. Roy. Soc.*, t. A 270, 1962, p. 103.
- [5] A. PAPAPETROU, *Nuclear Physics*, t. 57, 1964, p. 319 (pour la relation entre Ω_{ik} et $\dot{d}^{ik}$ voir A. PAPAPETROU, *C. R. Acad. Sc.*, t. 255, 1962, p. 1578).
- [6] L. INFELD et J. PLEBANSKI, *Motion and Relativity*, London, Pergamon Press., 1960.
- [7] E. NEWMAN et R. PENROSE, *J. Math. Phys.*, t. 3, 1962, p. 566.
E. NEWMAN et T. W. J. UNTI, *J. Math. Phys.*, t. 3, 1962, p. 891.

Manuscrit reçu le 19 septembre 1966.

Structure du champ gravitationnel « non-radiatif », sans hypothèse de symétrie, en relativité générale

par

Mme I. MORET-BAILLY

Laboratoire de Physique Théorique associé au C. N. R. S.,
Institut H. Poincaré, Paris.

RÉSUMÉ. — Ce travail établit deux théorèmes valables dans le cas « non-radiatif » pour le champ gravitationnel, sans hypothèse de symétrie axiale, étudié par Sachs. Deux théorèmes analogues ont déjà été démontrés pour le champ non-radiatif à symétrie axiale, et, en relativité restreinte, pour le champ électromagnétique.

De la structure du champ « non-radiatif » donné par le premier théorème on déduit celle des transformations de Bondi-Metzner-Sachs relatives à ce champ.

En outre, dans le cas d'un champ qui n'est pas nécessairement « non-radiatif », on démontre l'existence de transformations plus générales que celles de Bondi-Metzner-Sachs, dans le sens qu'elles conservent un comportement asymptotique du champ qui comprend, comme cas particulier, le comportement asymptotique minkowskien.

SUMMARY. — This work establishes two theorems of the « non-radiative » case of a gravitational field without the hypothesis of axial symmetry studied by Sachs. Two similar theorems have already being proven for the « non-radiative » field with axial symmetry and, in special Relativity, for the electromagnetic field.

For the structure of the « non-radiative » field given by the first theorem one deduces the structure of the Bondi-Metzner-Sachs transformations for this field.

Further, for the case of a field, which is not necessarily « non-radiative »,

we show the existence of transformations more general than those of Bondi-Metzner-Sachs in the sense that they conserve an asymptotic behaviour of the field, which includes as a particular case the Minkowski asymptotic behaviour.

I. INTRODUCTION

Dans un travail précédent [1], deux théorèmes concernant le champ gravitationnel retardé, solution des équations du vide et « non-radiatif », ont été démontrés dans le cas du champ à symétrie axiale étudié par Bondi [2]. Ici, dans les paragraphes 2 et 3, en appliquant la même méthode, nous établissons ces théorèmes dans le cas général traité par Sachs [3] et Newman, Penrose et Unti [4], c'est-à-dire dans le cas où le champ, toujours solution des équations du vide, ne possède pas de symétrie.

Énumérons brièvement les hypothèses faites dans ce travail.

Le champ gravitationnel retardé a la forme indiquée par Sachs [3] quand on utilise les coordonnées de Bondi [2] : $x^0 = u$, u est le temps retardé, $x^1 = r$, r est le paramètre distance lumineuse, $x^2 = \theta$, $x^3 = \phi$. Nous supposons que dans le domaine (D) défini par $r > r_0$ les composantes $g_{\mu\nu}$ du tenseur métrique sont développables en séries entières de $\frac{1}{r}$. Rappelons que, par définition, un tel champ est « non-radiatif » dans (D) s'il est solution des équations du vide et si en tout point $M \in (D)$, les composantes $R_{\mu'\nu'\rho'\sigma'}$ du tenseur de courbure par rapport à un système de repères orthonormés $(M, e_{(\mu')})$ ont un développement ne contenant pas de terme proportionnel à $\frac{1}{r}$. Cette définition du champ « non-radiatif » est imposée par le fait qu'il n'y a pas de perte d'énergie par rayonnement si et seulement si un tel terme n'existe pas. Écrivons le développement de $R_{\mu'\nu'\rho'\sigma'} \equiv R_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{(\mu')}^\alpha e_{(\nu')}^\beta e_{(\rho')}^\gamma e_{(\sigma')}^\delta$ sous la forme :

$$R_{\mu'\nu'\rho'\sigma'} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_{\mu'\nu'\rho'\sigma'}^{(n)}}{r^n}$$

la relation

$$(1-1) \quad R_{\mu'\nu'\rho'\sigma'}^{(1)} = 0$$

en tout point $M \in (D)$ définit le champ « non-radiatif » dans (D). Dans le

cas considéré par Sachs et avec la notation ⁽¹⁾ de Van der Burg [5] que nous adoptons, la condition (1-1) est équivalente à

$$(1-2) \quad \begin{cases} c_{00} = 0 \\ d_{00} = 0 \end{cases}$$

Dans le paragraphe 2 nous reprenons, avec de nouvelles notations, l'étude des équations du champ gravitationnel retardé quelconque en coordonnées radiatives. Dans le paragraphe 3, nous démontrons les théorèmes A et B et leurs conséquences pour le champ « non-radiatif ».

Donnons l'énoncé de ces théorèmes :

THÉORÈME A.

Si le champ est non radiatif dans (D), les composantes $g_{\alpha\beta}$ du tenseur métrique et $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ du tenseur de courbure s'écrivent sous la forme suivante, en tout point de (D) :

$$(1-3) \quad g_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_{ij}^n}{r^n}, \quad g_{iA} = r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_{iA}^n}{r^n}, \quad g_{AB} = r^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_{AB}^n}{r^n};$$

$$(1-4) \quad \begin{cases} R_{ijkl} = \frac{1}{r^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_{ijkl}^n}{r^n}, & R_{Aijk} = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_{Aijk}^n}{r^n}, \\ R_{ABik} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_{ABik}^n}{r^n}, & R_{A\bar{B}j} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_{A\bar{B}j}^n}{r^n}, \\ R_{AB\bar{C}i} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_{AB\bar{C}i}^n}{r^n}, & R_{ABCD} = r^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_{ABCD}^n}{r^n}, \end{cases}$$

avec $i, j, k, l = 0, 1, A, B, C, D = 2, 3$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 0, 1, 2, 3$, et où les $g_{\alpha\beta}^n$ et les $R_{\alpha\beta\gamma\delta}^n$ sont des polynômes en u dont le degré est inférieur ou égal à n .

THÉORÈME B.

Si le champ est « non-radiatif » dans le domaine (Ω) défini par :

$$(\Omega) \quad {}_1u < u < {}_2u, \quad {}_1r < r,$$

(¹) Si f est une fonction des x^α , $f_\alpha, f_{\alpha\beta}, \dots$ signifient respectivement $\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}, \dots$

et stationnaire dans le domaine

$$(\Omega') \quad {}_1u < u < {}_2u' \quad , \quad {}_1r < r \quad \text{avec} \quad {}_2u' < {}_2u,$$

il est stationnaire dans le domaine (Ω) .

Nous montrons que le théorème A pour les composantes du tenseur de courbure rapportées à un système de repères orthonormés est analogue au théorème A établi dans [7] pour le champ électromagnétique.

Dans les paragraphes 4 et 5 nous supposons que, dans le domaine (D) le champ ne satisfait pas nécessairement les équations du vide. Au paragraphe 4 nous rappelons la définition des transformations de Bondi-Metzner-Sachs qui est celle donnée dans [3]. Nous démontrons, pour celles qui sont développables en séries entières, par quelle puissance de $\frac{1}{r}$ débute leur développement, ceci indépendamment du comportement asymptotique du tenseur métrique. Dans le paragraphe 5 nous démontrons la condition nécessaire et suffisante suivante qui constitue le théorème D : une condition nécessaire et suffisante pour qu'un changement de coordonnées radiatives ait pour limite quand $r \rightarrow \infty$ celle d'une transformation de Bondi-Metzner-Sachs est qu'il laisse invariant le comportement asymptotique du tenseur métrique qui suit :

$$\lim_{r=\infty} \left(\frac{g_{22}}{r^2} \right) = -1 \quad , \quad \lim_{r=\infty} \left(\frac{g_{33}}{r^2} \right) = -\sin^2 \theta \quad , \quad \lim_{r=\infty} \left(\frac{g_{23}}{r^2} \right) = 0,$$

$$\lim_{r=\infty} (g_{01}) = 1,$$

$$\lim_{r=\infty} \left(\frac{g_{00}}{r^2} \right) = 0 = \lim_{r=\infty} \left(\frac{g_{0A}}{r^2} \right).$$

Nous prouvons alors l'existence d'un changement de coordonnées (T') qui comprend comme cas particulier les transformations de Bondi-Metzner-Sachs. La définition des changements de coordonnées (T') est celle des transformations de Bondi-Metzner-Sachs dans laquelle le comportement asymptotique du tenseur métrique est remplacé par le comportement asymptotique plus général indiqué ci-dessus. Nous pensons que l'existence de ces changements de coordonnées (T') est intéressante bien que ce comportement asymptotique ne présente pas un intérêt physique. La démonstration exige que le tenseur métrique et les changements de coordonnées soient de classe c^∞ dans le domaine (D).

Au paragraphe 6 nous supposons de nouveau que le tenseur métrique

satisfait les équations du vide et nous établissons le théorème E : dans le cas d'un champ non-radiatif les coefficients $\overset{n}{u}$, $\overset{n}{r}$, $\overset{n}{\theta}$, $\overset{n}{\phi}$ d'une transformation de Bondi-Metzner-Sachs développable en série entière de $\frac{1}{r}$,

$$\begin{aligned} u &= \bar{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overset{n}{u}(\bar{u}, \bar{\theta}, \bar{\phi})}{\bar{r}^n}, & \theta &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{n}{\theta}(\bar{u}, \bar{\theta}, \bar{\phi})}{\bar{r}^n}, \\ r &= \bar{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{n}{r}(\bar{u}, \bar{\theta}, \bar{\phi})}{\bar{r}^n}, & \Phi &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{n}{\Phi}(\bar{u}, \bar{\theta}, \bar{\phi})}{\bar{r}^n}, \end{aligned}$$

sont les polynômes de la variable $\bar{u}$ dont le degré est au plus égal à n , les coefficients de ces polynômes étant des fonctions de $\bar{\theta}$ et $\bar{\phi}$.

Enfin, en appendice, nous avons, dans un premier paragraphe, indiqué les notations utilisées pour les calculs du paragraphe 5 et dans un deuxième paragraphe démontré la loi de transformation des fonctions c_0 et d_0 dans une transformation de Bondi-Metzner-Sachs, loi qui est nécessaire à la démonstration du théorème B.

II. LA STRUCTURE DES ÉQUATIONS DU CHAMP

Dans ce paragraphe, nous ne faisons pas l'hypothèse (1-2). Nous reprenons l'étude de la structure des équations d'Einstein du vide traitée dans [3] résumée dans [5]. Nous faisons de légères modifications dans la notation des développements en séries des $g_{\mu\nu}$ utilisée dans [5] ceci pour des raisons qui paraîtront évidentes ultérieurement. Nous écrivons les développements de γ , δ et β sous la forme :

$$(2-1) \quad \gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overset{n}{\gamma}}{\bar{r}^n},$$

$$(2-2) \quad \delta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overset{n}{\delta}}{\bar{r}^n},$$

$$(2-3) \quad \beta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overset{n}{\beta}}{\bar{r}^n}.$$

Nous remplaçons les développements de U , W et de V par ceux de

$$(2-4) \quad \mathfrak{U} \equiv rU, \quad \mathfrak{W} \equiv rW, \quad \mathfrak{V} \equiv \frac{V}{r},$$

$$(2-5) \quad \mathfrak{U} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{{}^n\mathfrak{U}}{r^n}, \quad \mathfrak{W} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{{}^n\mathfrak{W}}{r^n}, \quad \mathfrak{V} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{{}^n\mathfrak{V}}{r^n}.$$

Rappelons que les γ , δ , β , $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{V}$ sont des fonctions des variables u , θ , ϕ . Les coefficients γ et δ du développement de γ et δ jouent le rôle principal dans l'étude des équations du champ. Nous allons construire avec ces γ et δ certaines fonctions que nous appellerons fonctions ψ . Leur introduction dans les calculs simplifie ceux-ci de façon appréciable.

Définition ⁽¹⁾ d'une fonction ψ . — C'est une série entière de $\frac{1}{r}$,

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{{}^n\psi}{r^n},$$

dont le coefficient ${}^n\psi$ de $\frac{1}{r^n}$ est, pour $n \geq 1$ une somme de produits tels que

$$a \cdot \overset{i_1}{\Gamma} \cdot \overset{i_2}{\Gamma} \dots \overset{i_j}{\Gamma} \dots \overset{i_p}{\Gamma}, \quad \text{avec} \quad i_1 + i_2 + \dots + i_j + \dots + i_p = n,$$

où a est une fonction des variables θ et ϕ et où $\overset{i_j}{\Gamma}$ est soit $\overset{i_j}{\gamma}$ soit $\overset{i_j}{\delta}$ soit une dérivée partielle d'ordre quelconque de ces fonctions par rapport à θ et ϕ , si elle existe; $\overset{0}{\psi}$ correspondant à $n = 0$ est une fonction des variables θ et ϕ .

PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS ψ .

L'addition, la multiplication, la dérivation des séries donnent les résultats suivants :

La somme de fonctions ψ est une fonction ψ . Le produit de fonctions ψ est une fonction ψ . Une dérivée partielle d'ordre p (si elle existe) par rapport aux variables θ et ϕ d'une fonction ψ est une fonction ψ . La dérivée partielle

⁽¹⁾ Nous apportons une rectification à la définition d'une fonction ψ donnée dans [I] : aux valeurs susceptibles d'être prises par $\overset{i_j}{\Gamma}$ déjà indiquées dans [I] : $\gamma \overset{i_j}{\gamma}_2, \overset{i_j}{\gamma}_{22}$, il faut ajouter : toute dérive partielle par rapport à θ de $\overset{j}{\gamma}$, si elle existe.

d'ordre p par rapport à r d'une fonction ψ est le produit d'une fonction ψ par $\frac{1}{r^p}$.

Remarquons, comme première application de cette définition, que γ , δ , e^γ , e^δ sont des fonctions ψ .

Nous utilisons les équations du champ sous la forme donnée dans [5]. Nous considérons d'abord la première équation principale, équation (2) de [5],

$$(2-6) \quad \beta_1 = \frac{1}{2} r (\gamma_1^2 \operatorname{ch}^2 2\delta + \delta_1^2).$$

On introduit (2-1), (2-2), (2-3) dans (2-6). Les propriétés des fonctions ψ montrent immédiatement que le second membre de (2-6) est le produit par $\frac{1}{r}$ d'une fonction ψ que nous désignons par ${}_a\psi$. L'identification du coefficient du terme en $\frac{1}{r^{n+1}}$ de chaque membre donne

$$-n\beta = -n{}_a\psi,$$

β est donc la fonction ${}_a\psi$ bien déterminée par la donnée de γ et δ :

$$(2-7) \quad \beta = {}_a\psi$$

Remarquons que $\beta^1 = 0$.

Considérons maintenant simultanément les deuxième et troisième équations principales, équations (3) et (4) de [5] qui s'écrivent en tenant compte de (2-4)

$$(2-8) \quad \left\{ r^3 \left[e^{2(\gamma-\beta)} \left(\mathfrak{U}_1 - \frac{\mathfrak{U}}{r} \right) \operatorname{ch} 2\delta + e^{-2\beta} \left(\mathfrak{W}_1 - \frac{\mathfrak{W}}{r} \right) \operatorname{sh} 2\delta \right] \right\}_1 \\ = 2r^2 \left[\beta_{12} + 2\delta_1 \delta_2 - \frac{2\beta_2}{r} - 4\gamma_1 \delta_2 \operatorname{sh} 2\delta \operatorname{ch} 2\delta \right. \\ \left. - (\gamma_{12} - 2\gamma_1 \gamma_2 + 2\gamma_1 \cotg \theta) \operatorname{ch}^2 2\delta \right] \\ + 2 \frac{r^2 e^{2\gamma}}{\sin \theta} [-\delta_{13} - 2\delta_1 \gamma_3 + (\gamma_{13} + 2\gamma_1 \gamma_3) \operatorname{sh} 2\delta \operatorname{ch} 2\delta + 2\gamma_1 \delta_3 (1 + 2 \operatorname{sh}^2 2\delta)]$$

$$(2-9) \quad \left\{ r^3 \left[d^{-2\beta} \left(\mathfrak{U}_1 - \frac{\mathfrak{U}}{r} \right) \operatorname{sh} 2\delta + e^{-2\gamma} \left(\mathfrak{W}_1 - \frac{\mathfrak{W}}{r} \right) \operatorname{ch} 2\delta \right] \right\}_1 \\ = 2r^2 e^{-2\gamma} [-\delta_{12} + 2\delta_1 \gamma_2 - 2\delta_1 \cotg \theta - (\gamma_{12} - 2\gamma_1 \gamma_2 + 2\gamma_1 \cotg \theta) \operatorname{sh} 2\delta \operatorname{ch} 2\delta \\ - 2\gamma_1 \delta_2 (1 + 2 \operatorname{sh}^2 2\delta)] + \frac{2r^2}{\sin \theta} \left[\beta_{13} + 2\delta_1 \delta_3 - \frac{2\beta_3}{r} \right. \\ \left. + 4\gamma_1 \delta_3 \operatorname{sh} 2\delta \operatorname{ch} 2\delta + (\gamma_{13} + 2\gamma_1 \gamma_3) \operatorname{ch}^2 2\delta \right].$$

On introduit (2-1), (2-2) et (2-7) dans (2-8) et (2-9). $e^{2(\gamma-\beta)} \operatorname{ch} 2\delta$, $e^{-2\beta} \operatorname{sh} 2\delta$, $e^{-2\gamma} \operatorname{ch} 2\delta$ sont des fonctions ψ dont nous écrivons le développement sous la forme suivante :

$$e^{2(\gamma-\beta)} \operatorname{ch} 2\delta = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{r^n},$$

$$e^{-2\beta} \operatorname{sh} 2\delta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^n}{r^n},$$

$$e^{-2\gamma} \operatorname{ch} 2\delta = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu^n}{r^n}.$$

En tenant compte de ces développements les premiers membres de (2-8) et (2-9) s'écrivent respectivement:

$$\left\{ r^2 \left[- \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{r^n} \right) \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \frac{\mathfrak{U}^n}{r^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^n}{r^n} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \frac{\mathfrak{W}^n}{r^n} \right] \right\}_1,$$

$$\left\{ r^2 \left[- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^n}{r^n} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \frac{\mathfrak{U}^n}{r^n} - \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu^n}{r^n} \right) \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \frac{\mathfrak{W}^n}{r^n} \right] \right\}_1,$$

ou encore

$$(2-10) \quad \left\{ \begin{aligned} & r \left[- 2 \frac{\mathfrak{U}^1}{r} + (n+2) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(n+1)\mathfrak{U}^n + \sum_{i+j=n} (j+1)(\lambda^i \mathfrak{U}^j + \mu^i \mathfrak{W}^j)}{r^n} \right] \\ & r \left[- 2 \frac{\mathfrak{W}^1}{r} + (n+2) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(n+1)\mathfrak{W}^n + \sum_{i+j=n} (j+1)(\nu^i \mathfrak{W}^j + \mu^i \mathfrak{U}^j)}{r^n} \right] \end{aligned} \right\}$$

Remarquons que le coefficient du terme en $\frac{1}{r^2}$ est nul dans chacun des crochets de (2-10).

Appliquons les propriétés des fonctions ψ dans les seconds membres de (2-8) et (2-9). Il s'ensuit que chacun d'eux est le produit

d'une fonction ψ par r dont le développement respectif débute par :

$$(2-11) \quad \left\{ \begin{array}{l} r \left[\frac{2\gamma_2^1 + 4\gamma^1 \cotg \theta + \frac{2\delta_3^1}{\sin \theta}}{r} + \frac{4\gamma_2^2 + 8\gamma^2 \cotg \theta + 4\frac{\delta_3^2}{\sin \theta}}{r^2} + \dots \right] \equiv r_b \psi \\ r \left[\frac{2\delta_2^1 + 4\delta^1 \cotg \theta - \frac{2\gamma_3^1}{\sin \theta}}{r} + \frac{4\delta_2^2 + 8\delta^2 \cotg \theta - 4\frac{\gamma_3^2}{\sin \theta}}{r^2} + \dots \right] \equiv r_c \psi. \end{array} \right.$$

Nous allons démontrer que l'identification des coefficients des puissances successives de $\frac{1}{r}$ dans (2-10) et (2-11) donne le résultat suivant :

a) seuls les coefficients $\overset{2}{\mathcal{U}}$ et $\overset{2}{\mathcal{W}}$ du développement de $\mathcal{U}$ et de $\mathcal{W}$ ne sont pas déterminés par (2-8) et (2-9) ;

b) $\overset{n}{\mathcal{U}}$, pour $n \neq 2$, est égal à une somme de termes de trois types. Les uns ne contiennent que des γ^i et δ^i avec $i \leq n$ et forment le coefficient $\overset{n}{a}\psi$ d'une fonction $\overset{n}{a}\psi$. D'autres contiennent $\overset{2}{\mathcal{U}}$ en facteur et des γ^i et δ^i , avec $i \leq n-2$, qui font apparaître le coefficient $\overset{n-2}{e}\psi$ d'une fonction $\overset{n-2}{e}\psi$. Les derniers contiennent $\overset{2}{\mathcal{W}}$ en facteur et des γ^i et δ^i , avec $i \leq n-2$, qui mettent en évidence le coefficient $\overset{n-2}{f}\psi$ d'une fonction $\overset{n-2}{f}\psi$. Les fonctions $\overset{n}{a}\psi$, $\overset{n-2}{e}\psi$, $\overset{n-2}{f}\psi$ sont des fonctions ψ bien déterminées par la donnée de γ et de δ .

$$(2-12) \quad \overset{n}{\mathcal{U}} = \overset{n}{a}\psi + \overset{2}{\mathcal{U}} \overset{n-2}{e}\psi + \overset{2}{\mathcal{W}} \overset{n-2}{f}\psi,$$

d'où l'expression de $\mathcal{U}$:

$$(2-13) \quad \mathcal{U} = \overset{n}{a}\psi + \frac{\overset{2}{\mathcal{U}}}{r^2} \overset{n-2}{e}\psi + \frac{\overset{2}{\mathcal{W}}}{r^2} \overset{n-2}{f}\psi.$$

c) De façon analogue, $\overset{n}{\mathcal{W}}$, pour $n \neq 2$, s'écrit sous la forme suivante

$$(2-14) \quad \overset{n}{\mathcal{W}} = \overset{n}{g}\psi + \overset{2}{\mathcal{U}} \overset{n-2}{h}\psi + \overset{2}{\mathcal{W}} \overset{n-2}{i}\psi,$$

d'où l'expression de $\mathcal{W}$:

$$(2-15) \quad \mathcal{W} = \overset{n}{g}\psi + \frac{\overset{2}{\mathcal{U}}}{r^2} \overset{n-2}{h}\psi + \frac{\overset{2}{\mathcal{W}}}{r^2} \overset{n-2}{i}\psi.$$

Le résultat *a)* est évident. Démontrons les résultats *b)* et *c)* c'est-à-dire démontrons que (2-12) et (2-14) sont vérifiés pour $n \neq 2$.

Identifions successivement les coefficients des termes indépendants de r , des termes en $\frac{1}{r}$, des termes en $\frac{1}{r^{n-1}}$ pour $n \geq 3$, dans (2-10) et (2-11).

$$(2-16) \quad \begin{cases} {}^1\mathfrak{U} = - \left(\gamma_2 + 2\gamma \cotg \theta + \frac{1}{\sin \theta} \delta_3 \right) = {}_a\psi, \\ {}^1\mathfrak{W} = - \left(\delta_2 + 2\delta \cotg \theta - \frac{1}{\sin \theta} \gamma_3 \right) = {}_e\psi. \end{cases}$$

$$(2-17) \quad \begin{cases} 0 = \gamma_2 + 2\gamma \cotg \theta + \frac{1}{\sin \theta} \delta_3, \\ 0 = \delta_2 + 2\delta \cotg \theta - \frac{1}{\sin \theta} \gamma_3. \end{cases}$$

$$(2-18) \quad \begin{cases} (n+1){}^n\mathfrak{U} + \sum_{i+j=n} (j+1)(\lambda^i \mu^j \mathfrak{U} + \mu^i \lambda^j \mathfrak{W}) = \frac{1}{n-2} {}_b\psi^n, \\ (n+1){}^n\mathfrak{W} + \sum_{i+j=n} (j+1)(\nu^i \lambda^j \mathfrak{W} + \mu^i \nu^j \mathfrak{U}) = \frac{1}{n-2} {}_c\psi^n. \end{cases} \quad \text{avec } n \geq 3.$$

(2-12) et (2-14) sont vérifiés pour $n = 1$ par (2-16). Montrons qu'ils sont vérifiés pour $n \geq 3$. Raisonnons par récurrence.

Montrons d'abord que (2-13) et (2-15) sont vérifiés pour $n = 3$. Faisons $n = 3$ dans (2-18)

$$\begin{cases} 4{}^3\mathfrak{U} + 3(\lambda^1 \mu^2 \mathfrak{U} + \mu^1 \lambda^2 \mathfrak{W}) + 2(\lambda^2 \mu^1 \mathfrak{U} + \mu^2 \lambda^1 \mathfrak{W}) = {}_b\psi^3 \\ 4{}^3\mathfrak{W} + 3(\nu^1 \lambda^2 \mathfrak{W} + \mu^1 \nu^2 \mathfrak{U}) + 2(\nu^2 \lambda^1 \mathfrak{W} + \mu^2 \nu^1 \mathfrak{U}) = {}_c\psi^3 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} {}^3\mathfrak{U} = \frac{1}{4} {}_b\psi^3 - \frac{1}{2} (\lambda^1 \mu^2 \mathfrak{U} + \mu^1 \lambda^2 \mathfrak{W}) - \frac{3}{4} \lambda^2 \mu^1 \mathfrak{U} - \frac{3}{4} \mu^2 \lambda^1 \mathfrak{W} \\ {}^3\mathfrak{W} = \frac{1}{4} {}_c\psi^3 - \frac{1}{2} (\nu^1 \lambda^2 \mathfrak{W} + \mu^1 \nu^2 \mathfrak{U}) - \frac{3}{4} \mu^1 \nu^2 \mathfrak{U} - \frac{3}{4} \nu^2 \mu^1 \mathfrak{W}. \end{cases}$$

En tenant compte de (2-16) et du fait que λ, μ, ν sont des fonctions ψ on a bien

$${}^3\mathfrak{U} = {}_a\psi^3 + {}^2\mathfrak{U}_e\psi + {}^2\mathfrak{W}_f\psi$$

avec :

$${}_d\psi^3 \equiv \frac{1}{4} {}_b\psi^3 - \frac{1}{2} (\lambda^2 {}_a\psi + \mu^2 {}_c\psi)$$

$${}_e\psi^1 \equiv -\frac{3}{4} \lambda^1$$

$${}_f\psi^1 \equiv -\frac{3}{4} \nu^1.$$

Montrons maintenant que si les relations

$$(2-19) \quad \begin{cases} {}_a\psi^{n-1} = {}_d\psi^{n-1} + {}_e\psi^{2n-3} + {}_f\psi^{2n-3} \\ {}_c\psi^{n-1} = {}_g\psi^{n-1} + {}_h\psi^{2n-3} + {}_i\psi^{2n-3} \end{cases}$$

sont vérifiées pour $n \geq 3$, (2-18) entraîne (2-13) et (2-15). Introduisons (2-19) dans (2-18) :

$$\begin{aligned} (n+1) {}_a\psi^n + \sum_{i+j=n} (j+1) [\lambda^i ({}_d\psi^j + {}_e\psi^{j-2} + {}_f\psi^{j-2}) + \mu^i ({}_g\psi^j + {}_h\psi^{j-2} + {}_i\psi^{j-2})] &= \frac{1}{n-2} {}_b\psi^n \\ (n+1) {}_c\psi^n + \sum_{i+j=n} (j+1) [\nu^i ({}_g\psi^j + {}_h\psi^{j-2} + {}_i\psi^{j-2}) + \mu^i ({}_d\psi^j + {}_e\psi^{j-2} + {}_f\psi^{j-2})] &= \frac{1}{n-2} {}_c\psi^n. \end{aligned}$$

De la définition des fonctions ψ on déduit immédiatement la proposition.

Démontrons que (2-17) entraîne $\gamma^2 = 0$, $\delta^2 = 0$. (2-17) s'écrit :

$$\sin \theta \frac{\partial (\gamma^2 \sin^2 \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\delta^2 \sin^2 \theta)}{\partial \Phi} = 0$$

$$\sin \theta \frac{\partial (\delta^2 \sin^2 \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial (\gamma^2 \sin^2 \theta)}{\partial \Phi} = 0$$

$\gamma^2 \sin^2 \theta$ et $\delta^2 \sin^2 \theta$ sur l'hypersurface $u = \text{cte}$, sont donc nécessairement solution de l'équation du second ordre :

$$\frac{\partial^2 z(\theta, \phi)}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 z(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} + \cotg \theta \frac{\partial z(\theta, \phi)}{\partial \theta} = 0$$

c'est-à-dire $\Delta z(\theta, \phi) = 0$ où Δ est le laplacien sur la sphère $u = \text{cte}$, $r = \text{cte}$. On sait que toute fonction scalaire z régulière sur une variété riemannienne compacte V_n et solution de $\Delta z = 0$ se réduit identiquement à une constante

sur V_n [6]. Donc les solutions γ^2 et δ^2 de (2-17) sur la sphère sont nécessairement de la forme $\frac{k}{\sin^2 \theta}$ où k est une constante. Les solutions pour lesquelles k est non nulle présentent une singularité essentielle pour $\theta = 0$. Donc seules sont acceptables les solutions $\gamma^2 = \delta^2 = 0$.

La quatrième équation principale, équation (5) de [5] s'écrit en tenant compte de (2-4)

$$\begin{aligned}
 (2-20) \quad \mathcal{U} + r\mathcal{U}' = & 2 \frac{e^{2\beta}}{\sin^2 \theta} [(\beta_{23} + \beta_2\beta_3 + \delta_2\delta_3) \operatorname{sh} 2\delta \\
 & + (\delta_{23} + \delta_3 \cotg \theta + \delta_2\gamma_3 - \gamma_2\delta_3 + \delta_2\beta_3 + \beta_2\delta_3) \operatorname{ch} 2\delta] \\
 & - e^{2(\beta-\gamma)} [(\beta_{22} + \beta_2^2 + \beta_2 \cotg \theta + 2\gamma_2^2 + 2\delta_2^2 - 1 - \gamma_{22} - 3\gamma_2 \cotg \theta \\
 & - 2\beta_2\gamma_2) \operatorname{ch} 2\delta + (\delta_{22} + 3\delta_2 \cotg \theta + 2\beta_2\delta_2 - 4\gamma_2\delta_2) \operatorname{sh} 2\delta] \\
 & - \frac{e^{2(\beta+\gamma)}}{\sin^2 \theta} [(\beta_{33} + \beta_3^2 + 2\gamma_3^2 + 2\delta_3^2 + \gamma_{33} + 2\beta_3\gamma_3) \operatorname{ch} 2\delta \\
 & + (\delta_{33} + 2\beta_3\delta_3 + 4\gamma_3\delta_3) \operatorname{sh} 2\delta] - \frac{1}{4} e^{-2\beta} [e^{2\gamma} (\mathcal{U}^2 + r^2 \mathcal{U}_1^2 - 2r\mathcal{U}\mathcal{U}_1) \\
 & + e^{-2\gamma} (\mathcal{W}^2 + r^2 \mathcal{W}_1^2 - 2r\mathcal{W}\mathcal{W}_1) \operatorname{ch} 2\delta \\
 & + 2 \operatorname{sh} 2\delta (\mathcal{U}\mathcal{W} + r^2 \mathcal{U}_1\mathcal{W}_1 - r\mathcal{U}_1\mathcal{W} - r\mathcal{W}_1\mathcal{U})] \\
 & + \frac{1}{2} (r\mathcal{U}_{12} + \mathcal{U}_1 r \cotg \theta + 3\mathcal{U}_2 + 3\mathcal{U} \cotg \theta) + \frac{1}{2} \frac{1}{\sin \theta} (r\mathcal{W}_{13} + 3\mathcal{W}_3).
 \end{aligned}$$

On y introduit (2-4) et (2-5) dans le premier membre de (2-20) et (2-4), (2-7), (2-13) et (2-15) dans le second membre.

Le premier membre s'écrit :

$$\mathcal{U} + r\mathcal{U}' \equiv 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (1-n) \frac{\mathcal{U}^n}{r^n}.$$

En utilisant la propriété des fonctions ψ dans le second membre de (2-20), on trouve que ce dernier est égal à une somme de termes, du second degré par rapport à $\left(\frac{\mathcal{U}}{r^2}\right)$, $\left(\frac{\mathcal{W}}{r^2}\right)$ et leurs dérivées par rapport à θ et ϕ , les coefficients étant des fonctions ψ .

L'identification des puissances successives de $\frac{1}{r}$ de chaque membre de cette équation principale montre que celle-ci ne détermine pas le coefficient $\mathcal{U}$. Par contre, elle détermine tous les autres coefficients $\mathcal{U}^n$ en fonction

de ${}^2\mathcal{U}$, ${}^2\mathcal{W}$, γ , δ avec $i \leq n$, le résultat étant donné par la formule :

$$(2-21) \quad \mathcal{V} = {}^n_j\psi + {}^2\mathcal{U}_h{}^{n-2}\psi + {}^2\mathcal{U}_l{}^{n-2}\psi + {}^2\mathcal{U}_m{}^{n-2}\psi + {}^2\mathcal{W}_n{}^{n-2}\psi + {}^2\mathcal{W}_o{}^{n-2}\psi + {}^2\mathcal{W}_p{}^{n-2}\psi \\ + ({}^2\mathcal{U})^2_q{}^{n-4}\psi + ({}^2\mathcal{W})^2_r{}^{n-4}\psi + {}^2\mathcal{U}^2_s{}^{n-4}\psi,$$

où les fonctions ψ sont déterminées par la donnée de γ , δ . Dans la suite, pour alléger les notations, nous désignerons par F , toute fonction de la forme

$$(2-22) \quad F = E + G \frac{{}^1\mathcal{V}}{r} + H \frac{{}^2\mathcal{U}}{r^2} + I \frac{{}^2\mathcal{U}_A}{r^2} + J \frac{{}^2\mathcal{W}}{r^2} + K \frac{{}^2\mathcal{W}_A}{r^2} + L \frac{({}^2\mathcal{U})^2}{r^4} \\ + M \frac{{}^2\mathcal{U}^2}{r^4} + N \frac{({}^2\mathcal{W}^2)}{r^4}.$$

où E , G , H , I , J , K , L , M et N sont des fonctions ψ . Notons que $\mathcal{V}$ est une fonction F , d'après (2-21)

$$(2-23) \quad \mathcal{V} = {}_aF.$$

De même les fonctions ψ , $\mathcal{U}$, $\mathcal{W}$ sont aussi des fonctions F .

Considérons maintenant simultanément les cinquième et sixième équations principales, équations (6) et (7) de [5]. Les premiers membres de ces équations s'écrivent respectivement :

$$(2-24) \quad \begin{cases} (r\gamma)_{01} \operatorname{ch} 2\delta + 2r(\gamma_0\delta_1 + \delta_0\gamma_1) \operatorname{sh} 2\delta, \\ (r\delta)_{01} - 2r\gamma_0\gamma_1 \operatorname{sh} 2\delta \operatorname{ch} 2\delta. \end{cases}$$

Écrivons les fonctions ψ , $\operatorname{ch} 2\delta$, $\operatorname{sh} 2\delta$, $\operatorname{sh} 2\delta \operatorname{ch} 2\delta$ sous la forme suivante :

$$\operatorname{ch} 2\delta \equiv 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^{n+1}}{r^{n+1}},$$

$$2 \operatorname{sh} 2\delta \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^n}{r^n},$$

$$2 \operatorname{sh} 2\delta \operatorname{ch} 2\delta \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau^n}{r^n}.$$

Introduisons ces développements dans (2-24). On obtient

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n\gamma_0}{r^{n+1}} \right) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho}{r^{n+1}} \right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_0}{r^n} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n\delta}{r^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_0}{r^n} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n\gamma}{r^n} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma}{r^n} \right) \\ & \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n\delta_0}{r^{n+1}} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_0}{r^n} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\gamma}{r^n} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau}{r^n}, \end{aligned} \right.$$

ce qui s'écrit encore

$$(2-25) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{-n\gamma_0}{r^{n+1}} + \sum_{i+j=n+1} \frac{-i\gamma_0 \rho}{r^{n+3}} + \sum_{p+q+l=n+2} \frac{-q(\gamma_0\delta + \delta_0\gamma)\sigma}{r^{n+2}} \right] \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{-n\delta_0}{r^{n+1}} + \sum_{p+q+l=n+2} \frac{q\gamma_0\gamma\sigma}{r^{n+2}} \right]. \end{aligned} \right.$$

Considérons maintenant les seconds membres ⁽¹⁾ des cinquième et sixième équations principales.

En y introduisant (2-7), (2-4), (2-13), (2-15) et (2-23), on trouve qu'ils sont respectivement le produit d'une fonction ${}_bF$ et ${}_cF$ par $\frac{1}{r}$. Nous allons démontrer que l'identification des coefficients des puissances successives de $\frac{1}{r}$ des membres de ces équations donne, pour $n \geq 1$, les $\gamma_0^{n+1} \equiv \frac{\partial \gamma}{\partial u}$ et les $\delta_0^{n+1} \equiv \frac{\partial \delta}{\partial u}$ en fonction des γ_i , avec $i \leq n$, de $\mathcal{U}^2$, $\mathcal{W}^2$, γ_0^1 , et de δ_0^1 . D'une façon plus précise, nous obtiendrons :

$$(2-26) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma_0^{n+1} &= {}_dF + {}_i\psi\gamma_0 + {}_u\psi\delta_0 \\ \delta_0^{n+1} &= {}_eF + {}_v\psi\gamma_0 + {}_w\psi\delta_0 \end{aligned} \right.$$

où les ${}_dF$, ${}_eF$, ${}_i\psi$, ${}_u\psi$, ${}_v\psi$, ${}_w\psi$ sont des fonctions bien définies par la donnée de γ_0^1 et δ_0^1 .

(1) Nous n'écrivons pas ces seconds membres à cause de leur longueur. Le calcul est analogue à celui effectué dans les seconds membres des équations principales précédentes. Les équations principales sont données sous leur forme complète p. 121-122 dans [5].

Soulignons que γ_0^1 et δ_0^1 ne sont pas déterminés par ces équations principales.

Établissons (2-26). L'identification des termes en $\frac{1}{r^2}$, en $\frac{1}{r^3}$, en $\frac{1}{r^4}$ (compte tenu de $\gamma^2 = \delta^2 = 0$), en $\frac{1}{r^{n+1}}$ donne successivement :

$$(2-27) \quad \begin{cases} -\gamma_0^2 \equiv {}_b\bar{F} \equiv 0, \\ -\delta_0^2 \equiv {}_c\bar{F} \equiv 0; \end{cases}$$

$$(2-28) \quad \begin{cases} -2\gamma_0^3 - (\gamma_0^1\delta_0^1 + \delta_0^1\gamma_0^1)\sigma \equiv {}_b\bar{F}^2, \\ -2\delta_0^3 + \gamma_0^1\gamma_0^1\tau \equiv {}_c\bar{F}^2; \end{cases}$$

$$(2-29) \quad \begin{cases} -3\gamma_0^4 - (\gamma_0^1\delta_0^1 + \delta_0^1\gamma_0^2)\sigma \equiv {}_b\bar{F}^3, \\ -4\delta_0^4 + \gamma_0^1\gamma_0^1\tau \equiv {}_c\bar{F}^3; \end{cases}$$

$$(2-30) \quad \begin{cases} -n\gamma_0^{n+1} + \sum_{i+j=n-1} -i\gamma_0^{i+1}\rho^{j+1} + \sum_{p+q+l=n+1} -q(\gamma_0^p\delta_0^q + \delta_0^q\gamma_0^l)\sigma \equiv {}_b\bar{F}^n, \\ -n\delta_0^{n+1} + \sum_{p+q+l=n+1} q\gamma_0^p\gamma_0^q\tau \equiv {}_c\bar{F}^n, \quad \text{pour } n \geq 4. \end{cases}$$

(2-27), (2-28), (2-29) montrent immédiatement que (2-26) est vérifié pour $n = 1, 2, 3$.

Prouvons que (2-26) est réalisé pour $n \geq 4$, en raisonnant par récurrence. Vérifions d'abord que (2-26) est vrai pour $n = 4$. (2-30) s'écrit pour $n = 4$ compte tenu de $\gamma^2 = \delta^2 = 0$,

$$(2-31) \quad \begin{cases} -4\gamma_0^5 - 2\gamma_0^3\rho - (\gamma_0^3\delta_0^1 + \delta_0^1\gamma_0^3)\sigma - 3(\gamma_0^1\delta_0^3 + \delta_0^3\gamma_0^1)\sigma - (\gamma_0^1\delta_0^1 + \delta_0^1\gamma_0^3)\sigma \equiv {}_b\bar{F}^4, \\ -4\delta_0^5 + (\gamma_0^3\gamma_0^1 + 3\gamma_0^3\gamma_0^1)\tau + \gamma_0^1\gamma_0^1\tau \equiv {}_c\bar{F}^4. \end{cases}$$

En remplaçant dans (2-31) γ_0^3 et δ_0^3 tirés de (2-28) on a la vérification immédiatement. Montrons ensuite que si l'on a

$$(2-32) \quad \begin{cases} \gamma_0^n = {}_a\bar{F}^{n-1} + {}_i\psi^{n-1} \gamma_0^{n-1} + {}_u\psi^{n-1} \delta_0^{n-1}, \\ \delta_0^n = {}_e\bar{F}^{n-1} + {}_v\psi^{n-1} \gamma_0^{n-1} + {}_w\psi^{n-1} \delta_0^{n-1}, \end{cases}$$

pour $n = 2, 3, \dots, n$, alors (2-30) entraîne (2-26). Introduisons (2-32) dans (2-30). On obtient :

$$\begin{aligned} {}_b^n F &\equiv -n\gamma_0 + \sum_{i+j+1=n} -i({}_d^i F + {}_t^i \psi \gamma_0 + {}_u^i \psi \delta_0) \rho \\ &+ \sum_{p-1+q+l} -q\sigma[({}_d^{p-1} F + {}_t^{p-1} \psi \gamma_0 + {}_u^{p-1} \psi \delta_0) \delta + ({}_e^{p-1} F + {}_v^{p-1} \psi \gamma_0 + {}_w^{p-1} \psi \delta_0) \gamma], \\ {}_c^n F &\equiv -n\delta_0 + \sum_{p-1+q+l=n} q({}_d^{p-1} F + {}_t^{p-1} \psi \gamma_0 + {}_u^{p-1} \psi \delta_0) \gamma \tau. \end{aligned}$$

On en déduit de suite que γ_0 et δ_0 se mettent bien sous la forme (2-26).

En faisant $n = 1, 2, 3, \dots$ successivement dans (2-26), on obtient les γ^i et δ^i , avec $i \neq 1$, par intégration par rapport à u .

Nous sommes ainsi arrivés au résultat suivant : les six équations principales déterminent les $\gamma^i, \delta^i, {}^i\mathcal{U}, {}^i\mathcal{W}, {}^i\mathcal{V}$, excepté les $\gamma^1, \delta^1, {}^1\mathcal{U}, {}^1\mathcal{W}, {}^1\mathcal{V}$, à des fonctions arbitraires de θ et ϕ près. Mais seuls γ^1 et δ^1 sont des fonctions arbitraires des trois variables u, θ, ϕ , car ${}^1\mathcal{U}, {}^1\mathcal{W}$ et ${}^1\mathcal{V}$ doivent satisfaire les trois équations du champ « supplémentaires », équations (13), (14), (15) de [5].

Ces équations supplémentaires s'écrivent, compte tenu de la définition de ${}^2\mathcal{U}, {}^2\mathcal{W}, {}^1\mathcal{V}, \gamma^1$ et de δ^1 :

$$\begin{aligned} (2-33) \quad {}^1\mathcal{V}_0 &= 2(\gamma_0^2 + \delta_0^2) - \left[\left(\gamma_2^1 + 2\gamma^1 \cotg \theta + \frac{\delta_3^1}{\sin \theta} \right)_2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\gamma_2^1 + 2\gamma^1 \cotg \theta + \frac{\delta_3^1}{\sin \theta} \right) \cotg \theta + \frac{1}{\sin \theta} \left(\delta_2^1 + 2\delta^1 \cotg \theta - \frac{1}{\sin \theta} \gamma_3^1 \right)_3 \right]_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2-34) \quad 3{}^2\mathcal{U}_0 &= 7(\gamma_0^1 \gamma_2^1 + \delta_0^1 \delta_2^1) + 3(\gamma \gamma_{20}^1 + \delta \delta_{20}^1) + 16(\gamma \gamma_0^1 + \delta \delta_0^1) \cotg \theta \\ &\quad + \frac{8}{\sin \theta} (\gamma_0^1 \delta_3^1 - \gamma_3^1 \gamma_0^1) + {}^1\mathcal{V}_2 - \frac{\lambda_3}{\sin \theta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2-35) \quad 3{}^2\mathcal{W}_0 &= \frac{1}{\sin \theta} {}^1\mathcal{V}_3 + \lambda_2 + 8(\gamma_2^1 \delta_0^1 - \gamma_0^1 \delta_2^1) + 8(\gamma \delta_0^1 - \gamma_0^1 \delta) \cotg \theta \\ &\quad + \frac{7}{\sin \theta} (\gamma_0^1 \gamma_3^1 + \delta_0^1 \delta_3^1) + \frac{3}{\sin \theta} (\delta \delta_{30}^1 - \gamma \gamma_{30}^1), \end{aligned}$$

avec

$$\lambda \equiv \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \cotg \theta \right) \left(\delta_2^1 + 2\delta^1 \cotg \theta - \frac{\gamma_3^1}{\sin \theta} \right) - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\gamma_2^1 + 2\gamma^1 \cotg \theta + \frac{\delta_3^1}{\sin \theta} \right).$$

Quand on a choisi $\overset{1}{\gamma}$ et $\overset{1}{\delta}$, le deuxième membre de (2-33) est connu et par conséquent cette équation détermine le coefficient $\overset{1}{U}$ à une fonction arbitraire de θ et ϕ près, après intégration par rapport à u . Mais alors les seconds membres de (2-34) et (2-35) sont connus et ces dernières équations déterminent $\overset{2}{U}$ et $\overset{2}{W}$ à des fonctions de θ et ϕ près.

III. LE CAS DU CHAMP « NON-RADIATIF »

Nous supposons maintenant que le champ gravitationnel est « non-radiatif », c'est-à-dire que nous faisons l'hypothèse (1-2) qui, ici, se traduit avec la notation $\overset{1}{\gamma} \equiv c$, $\overset{1}{\delta} \equiv d$ par

$$(3-1) \quad \begin{cases} \overset{1}{\gamma}_{00} = 0, \\ \overset{1}{\delta}_{00} = 0. \end{cases}$$

Ce qui entraîne que $\overset{1}{\gamma}$ et $\overset{1}{\delta}$ sont des polynômes en u de degré un au plus.

$$\begin{aligned} \overset{1}{\gamma} &= p(\theta, \phi)u + q(\theta, \phi), \\ \overset{1}{\delta} &= r(\theta, \phi)u + s(\theta, \phi). \end{aligned}$$

On déduit de (3-1), (2-33), (2-34), (2-35) que

$$(3-2) \quad \overset{1}{U}_{00} = 0, \quad \overset{2}{U}_{000} = 0, \quad \overset{2}{W}_{000} = 0.$$

(3-1) et la définition de $\overset{n}{\psi}$ entraîne $\overset{0}{\psi}_0 = 0$, $\overset{1}{\psi}_{00} = 0$, car $\overset{1}{\psi}$ est linéaire par rapport à $\overset{1}{\gamma}$, et $\overset{1}{\delta}$; $\overset{2}{\psi}_{000} = 0$, car $\overset{2}{\gamma}$ et $\overset{2}{\delta}$ étant nuls, $\overset{2}{\psi}$ est un polynôme homogène et du second degré par rapport à $\overset{1}{\gamma}$ et $\overset{1}{\delta}$; compte tenu de ce qui précède et de (2-22) qui donne $\overset{2}{F} = \overset{2}{\psi} + \overset{1}{\psi}\overset{1}{U} + \overset{0}{\psi}\overset{2}{U} + \overset{0}{\psi}\overset{2}{U}_A + \overset{0}{\psi}\overset{2}{W} + \overset{0}{\psi}\overset{2}{W}_A$, on a :

$$\overset{2}{F}_{000} = 0.$$

On fait maintenant $n = 2$ dans (2-26). On prend la dérivée $(n + 1)^{\text{ème}}$ c'est-à-dire troisième par rapport à u de chaque membre et on obtient d'après ce qui précède :

$$\overset{3}{\gamma}_{0000} = 0, \quad \overset{3}{\delta}_{0000} = 0 \quad \text{ce qui entraîne} \quad \overset{3}{\psi}_{0000} = 0 \quad \text{et} \quad \overset{3}{F}_{0000} = 0.$$

En répétant les mêmes opérations pour $n = 3, 4, \dots$ dans (2-26), on arrive au résultat suivant

$$(3-3) \quad \frac{\partial^{n+1}\gamma}{\partial u^{n+1}} = 0, \quad \frac{\partial^{n+1}\delta}{\partial u^{n+1}} = 0, \quad \frac{\partial^{n+1}\psi}{\partial u^{n+1}} = 0, \quad \frac{\partial^{n+1}F}{\partial u^{n+1}} = 0.$$

$\mathcal{U}$, $\mathcal{W}$ et $\mathcal{V}$ étant des fonctions F nous avons

$$\frac{\partial^{n+1}\mathcal{U}}{\partial u^{n+1}} = 0, \quad \frac{\partial^{n+1}\mathcal{W}}{\partial u^{n+1}} = 0, \quad \frac{\partial^{n+1}\mathcal{V}}{\partial u^{n+1}} = 0.$$

Nous obtenons donc la conclusion suivante :

Dans le cas d'un champ « non-radiatif », les γ , δ , β , $\mathcal{U}$, $\mathcal{W}$, $\mathcal{V}$, des développements de γ , δ , β , $\mathcal{U}$, $\mathcal{W}$, $\mathcal{V}$ sont des polynômes en u dont le degré est inférieur ou égal à n .

Les composantes non nulles du tenseur métrique sont données par l'expression (1) de [5]. Écrites en fonction de γ , δ , β , $\mathcal{U}$, $\mathcal{W}$, $\mathcal{V}$, elles sont :

$$(3-4) \quad \begin{cases} g_{00} = \mathcal{V}e^{2\beta} - \mathcal{U}^2e^{2\gamma} \operatorname{ch} 2\delta - \mathcal{W}^2e^{-2\gamma} \operatorname{ch} 2\delta - \mathcal{U}\mathcal{W} \operatorname{sh} 2\delta & g_{01} = e^{2\beta}, \\ g_{02} = r(e^{2\gamma}\mathcal{U} \operatorname{ch} 2\delta + \mathcal{W} \operatorname{sh} 2\delta), & g_{03} = r(e^{-2\gamma}\mathcal{W} \operatorname{ch} 2\delta + \mathcal{U} \operatorname{sh} 2\delta) \sin \theta, \\ g_{22} = -r^2e^{2\gamma} \operatorname{ch} 2\delta, & g_{33} = -r^2e^{-2\gamma} \operatorname{ch} 2\delta \sin^2 \theta, & g_{23} = -r^2 \operatorname{sh} 2\delta \sin \theta. \end{cases}$$

On voit, en tenant compte de (2-7), (2-13), (2-15), (2-23) que les g_{ik} , $\frac{g_{iA}}{r}$, $\frac{g_{AB}}{r^2}$, sont des fonctions F . Donc si on écrit les développements des $g_{\alpha\beta}$ sous la forme (1-3) on en déduit le théorème suivant compte tenu de (3-3) :

Si le champ est « non-radiatif » dans le domaine (D) les coefficients $g_{\alpha\beta}^n$ qui apparaissent dans le développement (1-3) des composantes $g_{\alpha\beta}$ du tenseur métrique en tout point $M \in (D)$ sont des polynômes en u dont le degré est inférieur ou égal à n .

Nous avons donc démontré le théorème A pour le tenseur métrique.

Nous avons une propriété analogue pour les $g^{\alpha\beta}$ toujours dans le cas « non-radiatif ». Les $g^{\alpha\beta}$ non nuls sont :

$$(3-5) \quad \begin{cases} g^{01} = e^{-2\beta}, & g^{11} = -\mathcal{V}, & g^{12} = \frac{\mathcal{U}e^{-2\beta}}{r}, & g^{13} = \frac{\mathcal{W}e^{-2\beta}}{r \sin \theta}, \\ g^{22} = \frac{-e^{-2\gamma} \operatorname{ch} 2\delta}{r^2}, & g^{23} = \frac{-\operatorname{sh} 2\delta}{r^2 \sin \theta}, & g^{33} = \frac{-e^{2\gamma} \operatorname{ch} 2\delta}{r^2 \sin^2 \theta}. \end{cases}$$

Leurs développements peuvent s'écrire comme suit :

$$(3-6) \quad g^{ik} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{ik}}{r^n}, \quad g^{iA} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{iA}}{r^n}, \quad g^{AB} = \frac{1}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{AB}}{r^n}.$$

On déduit de (3-3) que, dans le cas d'un champ « non-radiatif », les $g^{\alpha\beta}$ sont des polynômes en u dont le degré est inférieur ou égal à n . En tenant compte de la propriété des $g_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta}$, le calcul des composantes du tenseur de courbure donne le théorème A pour le tenseur de courbure :

Si le champ est « non-radiatif » dans le domaine (D), les coefficients $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ qui apparaissent dans le développement (1-4) des composantes $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ du tenseur de courbure sont des polynômes en u dont le degré est inférieur ou égal à n .

Pour comparer ces résultats à ceux du théorème A établi dans [7] pour le champ électromagnétique en relativité restreinte, il faut donner, en tout point $M \in (D)$, les composantes du tenseur de courbure par rapport à un repère orthonormé défini au point M . Nous pouvons prendre la famille de repères orthonormés utilisée par Bondi dans [2]. Désignons par $(M; e_{(\mu')})$ ces repères que nous allons définir. Appelons rayons les lignes coordonnées de la variable r . Le repère $(M; e_{(\mu')})$ est le repère qui, transporté par parallélisme le long du rayon passant par M a pour limite le repère $(m; T^\rho, R^\rho, S^\rho, P^\rho)$ quand $r \rightarrow \infty$:

$$(3-7) \quad T^\rho = (1, 0, 0, 0), \quad R^\rho = (-1, 1, 0, 0), \quad S^\rho = \left(0, 0, \frac{1}{r}, 0\right), \\ P^\rho = \left(0, 0, 0, \frac{1}{r \sin \theta}\right).$$

Exprimons le transport par parallélisme de $e_{(\mu')}^\rho$ le long d'un rayon :

$$(3-8) \quad \nabla_1 e_{(\mu')}^\rho = 0$$

Pour $\rho = 0$, on a :

$$\partial_1 e_{(\mu')}^0 = 0$$

d'où $e_{(\mu')}^0 = f(u, \theta, \phi)$ et d'après (3-7) on a :

$$e_{(0')}^0 = 1, \quad e_{(1')}^0 = -1, \quad e_{(2')}^0 = 0, \quad e_{(3')}^0 = 0.$$

Pour $\rho = 1, 2, 3$, on a :

$$(3-9) \quad \begin{cases} \partial_1 e_{(\mu')}^1 + \Gamma_1^1 e_{(\mu')}^0 + \Gamma_1^1 e_{(\mu')}^1 + \Gamma_1^1 e_{(\mu')}^2 + \Gamma_1^1 e_{(\mu')}^3 = 0 \\ \partial_1 e_{(\mu')}^2 + \Gamma_1^2 e_{(\mu')}^0 + \Gamma_1^2 e_{(\mu')}^1 + \Gamma_1^2 e_{(\mu')}^2 + \Gamma_1^2 e_{(\mu')}^3 = 0 \\ \partial_1 e_{(\mu')}^3 + \Gamma_1^3 e_{(\mu')}^0 + \Gamma_1^3 e_{(\mu')}^1 + \Gamma_1^3 e_{(\mu')}^2 + \Gamma_1^3 e_{(\mu')}^3 = 0. \end{cases}$$

Calculons la solution développable en série entière de $\frac{1}{r}$ de (3-9) qui satisfait (3-7).

Écrivons ses développements sous la forme :

$$(3-10) \quad e_{(\mu')}^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e_{(\mu')}^1}{r^n}, \quad e_{(\mu')}^A = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e_{(\mu')}^A}{r^n},$$

où les $e_{(\mu')}^{\alpha}$ sont des fonctions de u, θ, ϕ .

Mettons les développements de $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ sous la forme :

$$(3-11) \quad \Gamma_{jk}^i = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma_{jk}^i}{r^n}, \quad \Gamma_{jA}^i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma_{jA}^i}{r^n}, \quad \Gamma_{iA}^j = \frac{1}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma_{iA}^j}{r^n}, \quad \Gamma_{iB}^A = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma_{iB}^A}{r^n}.$$

Introduisons (3-10) et (3-11) dans (3-9)

$$(3-12) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{r} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n e_{(\mu')}^1}{r^n} + \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{11}^1}{r^n} e_{(\mu')}^0 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma_{11}^1}{r^n} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e_{(\mu')}^1}{r^n} \right. \\ & \quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{11}^1}{r^n} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e_{(\mu')}^A}{r^n} \right] = 0 \\ & \frac{1}{r^2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} - (n+1) \frac{e_{(\mu')}^2}{r^n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma_{12}^2}{r^n} e_{(\mu')}^0 + \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{12}^2}{r^n} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e_{(\mu')}^2}{r^n} \right. \\ & \quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{12}^2}{r^n} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e_{(\mu')}^3}{r^n} \right] = 0 \\ & \frac{1}{r^2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} - (n+1) \frac{e_{(\mu')}^3}{r^n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma_{13}^3}{r^n} e_{(\mu')}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{13}^3}{r^n} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e_{(\mu')}^2}{r^n} \right. \\ & \quad \left. + \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{13}^3}{r^n} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e_{(\mu')}^3}{r^n} \right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Ce système devient :

$$(3-13) \left\{ \begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n} \left[-n e_{(\mu')}^1 + \Gamma_{10}^1 e_{(\mu')}^0 + \sum_{p+q+1=n} \Gamma_{1A}^{p+1} e_{(\mu')}^q \right] \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{r^n} \sum_{p+q+2=n} \Gamma_{11}^{p+2} e_{(\mu')}^q = 0 \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n} \left[-n e_{(\mu')}^2 + \sum_{p+q+1=n} \Gamma_{1A}^{p+1} e_{(\mu')}^q \right] + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{r^n} \Gamma_{10}^2 e_{(\mu')}^0 = 0 \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n} \left[-n e_{(\mu')}^3 + \sum_{p+q+1=n} \Gamma_{1A}^{p+1} e_{(\mu')}^q \right] + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{r^n} \Gamma_{10}^3 e_{(\mu')}^0 = 0 \end{aligned} \right.$$

où $p, q = 0, 1, 2, \dots$

L'identification des coefficients des termes en $\frac{1}{r^n}$ dans les membres des deux dernières équations (3-13) donne un système qui, pour $n = 1, 2, 3, \dots$, détermine successivement les $e_{(\mu')}^n$.

On voit de suite que la première équation (3-13) détermine ensuite les coefficients $e_{(\mu')}^1$.

Dans le cas où le champ est « non-radiatif » on déduit du théorème A que les $\Gamma_{\beta\gamma}^n$ sont des polynômes en u dont le degré est au plus égal à n . De la structure des équations (3-13) il s'ensuit que les $e_{(\mu')}^n$ sont alors des polynômes en u dont le degré est au plus égal à n .

Écrivons les composantes au point M du tenseur métrique et du tenseur de courbure par rapport au repère $(M; e_{(\mu')})$

$$(3-14) \left\{ \begin{aligned} g_{\mu'\nu'} &= g_{ij} e_{(\mu')}^i e_{(\nu')}^j + g_{iA} (e_{(\mu')}^i e_{(\nu')}^A + e_{(\mu')}^A e_{(\nu')}^i) + g_{AB} e_{(\mu')}^A e_{(\nu')}^B, \\ R_{\mu'\nu'\rho'\sigma'} &= R_{ijkl} e_{(\mu')}^i e_{(\nu')}^j e_{(\rho')}^k e_{(\sigma')}^l + \dots \end{aligned} \right.$$

Les développements (1-3), (1-4) et (3-10) et leur propriété dans le cas du champ « non-radiatif » permettent d'écrire (3-14) sous la forme

$$(3-15) \left\{ \begin{aligned} g_{\mu'\nu'} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_{\mu'\nu'}^n}{r^n}, \\ R_{\mu'\nu'\rho'\sigma'} &= \frac{1}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_{\mu'\nu'\rho'\sigma'}^n}{r^n} \end{aligned} \right.$$

où les $g_{\mu'\nu'}^n$, $R_{\mu'\nu'\rho'\sigma'}^n$ sont des polynômes en u dont le degré est au plus égal à n . Ces résultats pour le tenseur de courbure sont donc analogues à ceux du champ électromagnétique étudié dans [7] en relativité restreinte puisque les composantes du champ électromagnétique « non-radiatif » peuvent s'écrire en un point M :

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{F}_{\mu\nu}^n}{r^n}$$

où r est la distance du point M à l'origine des coordonnées galiléennes utilisées.

Faisons une remarque. Les hypothèses faites sur les $e_{(\mu')}^\rho$ pour obtenir le théorème A sous la forme (3-15) sont : les $e_{(\mu')}^\rho$ sont linéairement indépendants, ils ont une décomposition de la forme (3-10) où les $e_{(\mu')}^0$ ne sont pas tous nuls, ils sont transportés par parallélisme le long des rayons. Le résultat (3-15) est donc encore valable pour tout système $e_{(\mu')}^\rho$ satisfaisant ces hypothèses. C'est le cas pour les vecteurs du repère « quasi-orthonormé » de Sachs [3].

Le degré des polynômes en u $g_{\alpha\beta}^n$ qui apparaissent dans (1-3) n'est pas en général invariant par rapport aux transformations de Bondi-Metzner-Sachs. En effet, considérons le champ de Schwarzschild d'abord avec un système de coordonnées « radiatives » dans lequel les $g_{\alpha\beta}$ sont indépendants de u . Tous les $g_{\alpha\beta}^n$ sont alors des polynômes en u dont le degré est zéro. Mais après une transformation de Bondi-Metzner-Sachs correspondant à une transformation de Lorentz, la métrique dépend de u et par conséquent les coefficients $g_{\alpha\beta}^n$ ne sont plus tous de degré zéro. Cependant nous démontrerons dans le paragraphe 2 de l'appendice le lemme suivant :

LEMME. — Si γ^1 et δ^1 sont indépendants de u , leurs transformées $\frac{1}{\gamma}$ et $\frac{1}{\delta}$ par une transformation quelconque de Bondi-Metzner-Sachs sont indépendantes de u . Si l'un au moins des deux coefficients γ^1 et δ^1 est un polynôme en u dont le degré est un, l'une au moins de leurs transformées $\frac{1}{\gamma}$, $\frac{1}{\delta}$ par une transformation quelconque de Bondi-Metzner-Sachs est encore un polynôme en u dont le degré est un.

Ceci entraîne que dans le cas d'un champ « non-radiatif » certains coefficients sont des polynômes en u dont le degré est invariant par rapport à

ces transformations. C'est le cas de $g_{01}^2 = -\frac{1}{2}[(\overset{1}{\gamma})^2 + (\overset{1}{\delta})^2]$. Nous pouvons donc conclure que si le champ est « non-radiatif » et que si $\overset{1}{\gamma}$ et $\overset{1}{\delta}$ ne sont pas tous deux indépendants de u , ce champ est nécessairement non stationnaire ⁽¹⁾.

Cette dernière remarque nous permet de préciser le théorème A dans le cas d'un champ stationnaire : En effet $\overset{1}{\gamma}_0$ et $\overset{1}{\delta}_0$ étant nécessairement nuls, on peut supprimer un indice zéro de dérivation dans les formules (3-3).

On en déduit que les $g_{\mu\nu}^n$ et $R_{\mu'\nu'\rho'\sigma'}^n$ définis par (3-15) sont des polynômes en u dont le degré est au plus égal à $n - 1$, mais cette propriété ne caractérise pas le champ stationnaire puisqu'elle n'est pas suffisante.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème B. Nous supposons que le champ est « non-radiatif » dans le domaine

$$(\Omega) \quad {}_1u < u < {}_2u, \quad {}_1r < r$$

et stationnaire dans le domaine

$$(\Omega') \quad {}_1u < u < {}_2u' \quad {}_1r < r \quad \text{avec} \quad {}_2u' < {}_2u,$$

Nous pouvons introduire un système de coordonnées de Bondi tel que les $g_{\mu\nu}$ soient indépendants de u dans le domaine (Ω') . Le champ étant non-radiatif dans (Ω) , les coefficients $g_{\mu\nu}^n$ sont en tout point de ce domaine des polynômes en u . Mais le tenseur métrique est indépendant de u dans la partie (Ω') de (Ω) et par conséquent le degré de tous ces polynômes est zéro. Le champ est donc stationnaire dans le domaine (Ω) . Le théorème (B) est démontré.

Donnons une autre démonstration de ce théorème. Un champ « non-radiatif » dépend, d'après le théorème A, de la coordonnée u par l'intermédiaire des fonctions élémentaires u^λ , $\lambda = 0, 1, 2, \dots$. Il s'ensuit qu'au passage d'un champ stationnaire à un champ non-stationnaire, il y aurait nécessairement une onde de choc. Mais on sait qu'il n'y a pas d'onde de choc dans le cas d'un champ « non-radiatif » [7] donc le champ est stationnaire.

(¹) Le champ gravitationnel est dit stationnaire dans un domaine de la variété espace-temps s'il existe, dans ce domaine, un champ de vecteurs de Killing orientés dans le temps.

De ces théorèmes, nous pouvons déduire les conclusions déjà établies pour le champ à symétrie axiale dans [1] :

a) les quantités c_0 et d_0 ne sont pas suffisantes pour décrire en détail le rayonnement gravitationnel ;

b) le champ créé par des corps en mouvement purement gravitationnel doit être radiatif.

IV. LES TRANSFORMATIONS DE BONDI-METZNER-SACHS

Dans ce paragraphe le tenseur métrique n'est pas nécessairement solution des équations du vide. Nous prenons comme définition des transformations de Bondi-Metzner-Sachs celle qui est donnée dans [3].

Nous allons la rappeler mais d'abord énumérons les hypothèses faites sur la variété riemannienne V_4 .

1. Hypothèses.

a) Il existe un domaine $(^1)(\Omega)$ de V_4 susceptible d'être rapporté à un système de coordonnées radiatives $(\bar{u}, \bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\phi})$, ce domaine étant défini par :

$$(4-1) \quad {}_1\bar{u} < \bar{u} < {}_2\bar{u}, \quad {}_1\bar{r} < \bar{r}, \quad 0 \leq \bar{\theta} \leq \pi, \quad 0 \leq \bar{\phi} \leq 2\pi.$$

Nous savons qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système de coordonnées définies sur (Ω) soit un système de coordonnées radiatives est que les composantes $g_{\alpha\bar{\beta}}$ du tenseur métrique dans ce système de coordonnées satisfont en tout point de (Ω) :

$$(4-2) \quad g_{11} = 0, \quad g_{12} = 0, \quad g_{13} = 0, \quad g_{22} \cdot g_{33} - (g_{23})^2 = \bar{r}^4 \sin^2 \bar{\theta}.$$

Les $g_{\alpha\bar{\beta}}$ non nuls peuvent alors prendre la forme (3-4).

b) Le comportement asymptotique des $g_{\alpha\bar{\beta}}$ non nuls définis sur (Ω) dans ce système de coordonnées est :

$$(4-3) \quad \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \left(\frac{g_{22}}{\bar{r}^2} \right) = -1, \quad \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \left(\frac{g_{33}}{\bar{r}^2} \right) = -\sin^2 \bar{\theta}, \quad \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \left(\frac{g_{23}}{\bar{r}^2} \right) = 0, \quad \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} (g_{01}) = 1, \\ \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} (g_{00}) = 1, \quad \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \left(\frac{g_{0A}}{\bar{r}} \right) = 0.$$

(¹) (Ω) désignera dans la suite un domaine défini par (4-1).

Il exprime que la métrique est Minkowskienne quand $\bar{r} \rightarrow \infty$.

c) Les $g_{\alpha\bar{\beta}}$ sont en tout point de (Ω) développables en séries entières de $\frac{1}{r}$.

Les propriétés (a), (b), (c) sont caractérisées par l'existence des six fonctions $\bar{\gamma}$, $\bar{\delta}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\alpha}$, $\bar{\omega}$, $\bar{\nu}$ et de leur développement donné par (2-1), (2-2), (2-3), (2-4), (2-5), dont dépendent les $g_{\alpha\bar{\beta}}$ non nuls donnés par (3-4).

2. Définition.

Nous désignons par transformation de Bondi-Metzner-Sachs tout changement de système de coordonnées définies sur (Ω)

$$(4-4) \quad \begin{cases} u = u(\bar{u}, \bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\phi}) \\ r = r(\bar{u}, \bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\phi}) \\ \theta = \theta(\bar{u}, \bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\phi}) \\ \Phi = \Phi(\bar{u}, \bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\phi}) \end{cases}$$

qui conserve les propriétés (a), (b), (c) des composantes du tenseur métrique dans le nouveau système de coordonnées (u, r, θ, ϕ) . Toute transformation de Bondi-Metzner-Sachs dont les fonctions u, r, θ, ϕ sont développables en séries entières de $\frac{1}{r}$ sera notée (T) dans la suite.

Remarquons que l'hypothèse ${}_1\bar{r} < \bar{r}$ tirée de (4-1) et l'hypothèse b) supposent l'existence d'un domaine $(^1)$ à l'infini (ω) de (Ω) . Ce domaine (ω) est défini comme suit :

Le point M appartient à (ω) si la coordonnée $\bar{r}$ d'un système de coordonnées radiatives définies en ce point est supérieure à tout nombre positif A donné arbitrairement grand. Réciproquement si M appartient à (ω) la coordonnée r de tout système de coordonnées radiatives définies en ce point surpasse tout nombre A positif donné.

3. Forme du développement des fonctions u, r, θ, Φ dans (4-4).

L'étude des changements de coordonnées (T) est faite dans [3]. On y cherche d'abord par quelle puissance de $\frac{1}{r}$ débute nécessairement les développements de u, r, θ, ϕ dans (4-4). Donnons-en une démonstration diffé-

(¹) (ω) désignera le domaine à l'infini de (Ω) , dans la suite.

rente qui est indépendante du comportement asymptotique du tenseur métrique. Par hypothèse les coordonnées u, r, θ, ϕ sont admissibles, c'est-à-dire que u, r, θ, ϕ sont des fonctions de classe c^2 au moins dont le Jacobien

$$(4-5) \quad \Delta = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ r_0 & r_1 & r_2 & r_3 \\ \theta_0 & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{vmatrix}$$

est défini et non nul en tout point de (Ω) . Les fonctions u, r, θ, ϕ étant développables en séries entières de $\frac{1}{\bar{r}}$ ont une limite finie ou non quand $\bar{r}$ tend vers l'infini. Il en est de même de leurs dérivées partielles du premier ordre. La définition même des coordonnées radiatives impose que la limite des fonctions u, θ, ϕ soit finie. Les développements de u, θ, ϕ débutent donc par un terme indépendant de $\bar{r}$. La définition d'un point à l'infini entraîne que la limite de r quand $\bar{r}$ tend vers l'infini est $+\infty$. Mais le développement en série par rapport à $\frac{1}{\bar{r}}$ de la fonction r ne doit pas contenir de puissance de $\bar{r}$ supérieure à un. En effet le calcul montre que la limite du jacobien (4-5) quand $\bar{r}$ tend vers l'infini est celle du produit de $r_{\bar{1}}$ par son cofacteur, si nous supposons que la limite de ce cofacteur est non nulle. Remarquons que si l'une des trois quantités $\lim_{\bar{r}=\infty} (\text{cofacteur de } r_{\bar{1}})$, $\lim_{\bar{r}=\infty} \left(\frac{r}{\bar{r}}\right)$, $\lim_{\bar{r}=\infty} \left(\frac{g_{01}}{g_{0\bar{1}}}\right)$ est finie et non nulle, les deux autres le sont aussi. Il ne reste à prouver cette propriété que pour $\frac{g_{01}}{g_{0\bar{1}}}$. Elle s'établit à partir de

$$\lim_{\bar{r}=\infty} \{ \det |g_{\alpha\bar{\beta}}| \} = \lim_{\bar{r}=\infty} \{ \Delta^2 \det |g_{\alpha\beta}| \},$$

après avoir tenu compte de (4-2), pour $g_{\alpha\bar{\beta}}$ et $g_{\alpha\beta}$.

Tout changement de coordonnées (T) doit donc avoir le développement ⁽¹⁾ suivant :

$$(4-6) \quad u = \bar{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u}{\bar{r}^n} \quad \theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta}{\bar{r}^n} \quad r = \bar{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r}{\bar{r}^n} \quad \Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi}{\bar{r}^n}$$

(1) Cette notation présente l'avantage suivant : les facteurs des g_{ik} , des $r^{-1}g_{iA}$ et des $r^{-2}g_{AB}$ dans le second membre de (5-9) sont des séries entières de $\frac{1}{\bar{r}}$ dont le coefficient du terme en $\frac{1}{\bar{r}^n}$ a pour indice n ; on peut vérifier cette propriété dans (A, 2).

où les $\overset{n}{u}, \overset{n}{r}, \overset{n}{\theta}, \overset{n}{\phi}$ sont des fonctions des variables $\bar{u}, \bar{\theta}, \bar{\phi}$. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME C.

Si V_4 possède un domaine (Ω) et si sur (Ω) existe un changement de coordonnées radiatives $(\bar{u}, \bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\phi})$ en coordonnées radiatives (u, r, θ, ϕ) , si le rapport de g_{01} à $g_{0\bar{1}}$ a une limite finie non nulle quand $\bar{r} \rightarrow \infty$ et si, en outre, on suppose que u, r, θ, ϕ sont développables en séries entières de $\frac{1}{r}$, ces développements ont nécessairement la forme (4-6).

V. LES CHANGEMENTS DE COORDONNÉES (T')

Nous montrerons dans ce paragraphe que les changements de coordonnées (T) sont un cas particulier de changements de coordonnées (T') que nous définirons après avoir établi le théorème D.

1. Théorème D.

Nous supposons les conditions d'applications du théorème (C) réalisées. Nous supposons donc que V_4 possède un domaine (Ω) , qu'il existe un changement (R) de système de coordonnées radiatives tel que les nouvelles coordonnées u, r, θ, ϕ soient développables en séries entières de $\frac{1}{r}$ (d'après le théorème (C) ces développements sont donc de la forme (4-6)). Nous supposons en outre que sur (Ω) est défini un tenseur métrique dont le comportement asymptotique ⁽¹⁾ des composantes non nulles est :

$$(5-1) \begin{cases} \lim_{\bar{r}=\infty} \left(\frac{g_{22}}{\bar{r}^2} \right) = -1, & \lim_{\bar{r}=\infty} \left(\frac{g_{33}}{\bar{r}^2} \right) = -\sin^2 \bar{\theta}, & \lim_{\bar{r}=\infty} \left(\frac{g_{23}}{\bar{r}^2} \right) = 0, & \lim_{\bar{r}=\infty} (g_{01}) = 1, \\ \lim_{\bar{r}=\infty} \left(\frac{g_{00}}{\bar{r}^2} \right) = 0 = \lim_{\bar{r}=\infty} \left(\frac{g_{0A}}{\bar{r}^2} \right). \end{cases}$$

Alors, une condition nécessaire et suffisante pour que les coefficients $\overset{1}{u}, \overset{0}{r}, \overset{0}{\theta}, \overset{0}{\phi}$ relatifs au changement de coordonnées (R) soient ceux d'un changement

⁽¹⁾ Ce comportement asymptotique est plus général que celui donné par (4-3).

de coordonnées (T) est que (R) laisse invariant le comportement asymptotique (5-1) du tenseur métrique.

Rappelons d'abord la forme des coefficients $u, r, \overset{0}{\theta}, \overset{0}{\phi}$ relatifs à un changement de coordonnées (T) donnée dans [3].

Les fonctions $\overset{0}{\theta}$ et $\overset{0}{\phi}$ sont indépendantes de $\bar{u}$: $\overset{0}{\theta} = \overset{0}{\theta}(\bar{\theta}, \bar{\phi})$, $\overset{0}{\phi} = \overset{0}{\phi}(\bar{\theta}, \bar{\phi})$, et sont les transformations conformes sur la sphère à deux dimensions $(\bar{\theta}, \bar{\phi})$ dont le rayon est l'unité. Les fonctions $\overset{0}{\theta}$ et $\overset{0}{\phi}$ qui caractérisent ces transformations sont les solutions du système :

$$(5-2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overset{0}{\theta}_2 = \varepsilon \overset{0}{\phi}_3 \frac{\sin \overset{0}{\theta}}{\sin \bar{\theta}} \\ \frac{\overset{0}{\theta}_3}{\sin \bar{\theta}} = \varepsilon \overset{0}{\phi}_2 \sin \overset{0}{\theta} \end{array} \right. \quad \text{où} \quad \varepsilon = \pm 1.$$

$\overset{0}{r}$ est alors donné par

$$(5-3) \quad (\overset{0}{r})^4 = \frac{\sin^2 \bar{\theta}}{(\overset{0}{\theta}_2 \overset{0}{\phi}_3 - \overset{0}{\theta}_3 \overset{0}{\phi}_2)^2 \sin^2 \bar{\theta}}$$

$\overset{1}{u}$ est de la forme :

$$(5-4) \quad \overset{1}{u} = \frac{\bar{u}}{\overset{0}{r}} + \alpha(\bar{\theta}, \bar{\phi}),$$

où α est une fonction des variables $\bar{\theta}, \bar{\phi}$, de classe au moins c^2 arbitraire. Démontrons maintenant le théorème (D) et prouvons d'abord que la condition est suffisante. Pour tout vecteur X appartenant à l'espace tangent du point $M \in (\Omega)$, nous avons :

$$g_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta = g_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta$$

ou

$$\frac{g_{\alpha\beta}}{\bar{r}^2} X^\alpha X^\beta = \frac{r^2}{\bar{r}^2} \frac{g_{\alpha\beta}}{r^2} X^\alpha X^\beta.$$

En tout point M du domaine à l'infini (ω) de (Ω) on a, compte tenu de l'invariance du comportement asymptotique (5-1) du tenseur métrique :

$$(5-5) \quad (X^2)^2 + \sin^2 \bar{\theta} (X^3)^2 = (\overset{0}{r})^2 [(X^2)^2 + \sin^2 \bar{\theta} (X^3)^2].$$

Ceci exprime que les transformations $\overset{0}{\theta} = \overset{0}{\theta}(\bar{u}, \bar{\theta}, \bar{\phi})$, $\overset{0}{\phi} = \overset{0}{\phi}(\bar{u}, \bar{\theta}, \bar{\phi})$ sont les transformations conformes sur la sphère à deux dimensions $(\bar{\theta}, \bar{\phi})$ dont le rayon est l'unité. Il s'ensuit qu'elles sont indépendantes de la variable $\bar{u}$ et qu'elles sont solution de (5-2); $\overset{0}{r}$ est alors donné par (5-3).

Il nous reste à prouver que $\overset{1}{u}$ satisfait (5-4). Nous avons :

$$(5-6) \quad \lim_{\bar{r}=\infty} \left\{ \frac{\det |g_{\alpha\beta}|}{\bar{r}^4} \right\} = \lim_{\bar{r}=\infty} \left\{ \left(\frac{D(u, r, \theta, \phi)}{D(\bar{u}, \bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\phi})} \right)^2 \frac{\det |g_{\alpha\beta}|}{\bar{r}^4} \right\} \\ = \lim_{\bar{r}=\infty} \left\{ \left(\frac{D(u, r, \theta, \phi)}{D(\bar{u}, \bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\phi})} \right)^2 (-g_{01})^2 \right\} \overset{0}{r}^4 \sin^2 \overset{0}{\theta},$$

d'où nous déduisons, compte tenu de l'invariance du comportement asymptotique du tenseur métrique :

$$\sin^2 \bar{\theta} = [\overset{1}{u}_0 \overset{0}{r} (\overset{0}{\theta}_2 \overset{0}{\phi}_3 - \overset{0}{\theta}_3 \overset{0}{\phi}_2)]^2 \sin^2 \overset{0}{\theta} (\overset{0}{r})^4,$$

et en tenant compte de (5-3) nous obtenons :

$$(\overset{1}{u}_0 \overset{0}{r})^2 = 1.$$

$\overset{1}{u}_0$ et $\overset{0}{r}$ étant positifs par hypothèse, $\overset{1}{u}$ satisfait (5-4).

Démontrons maintenant que la condition est nécessaire. Ceci est immédiat. Toute solution de (5-2) entraîne (5-5) qui avec (5-1) donne :

$$(5-7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{r=\infty} \left(\frac{g_{22}}{r^2} \right) = -1, \quad \lim_{r=\infty} \left(\frac{g_{33}}{r^2} \right) = -\sin^2 \theta, \quad \lim_{r=\infty} \left(\frac{g_{23}}{r^2} \right) = 0, \\ \lim_{r=\infty} \left(\frac{g_{00}}{r^2} \right) = 0 = \lim_{r=\infty} \left(\frac{g_{0A}}{r^2} \right). \end{array} \right.$$

De même (5-1), (5-2), (5-3), (5-4), (4-2) appliqué à $g_{\alpha\beta}$, (5-7) introduits

dans $g_{01} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^0} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^1} g_{\alpha\beta}$ entraînent $\lim_{r=\infty} (g_{01}) = 1$.

2. Définition des changements de coordonnées (T')

Les hypothèses faites sur V_4 sont :

a) Il existe un domaine $(\Omega) \subset V_4$ sur lequel est défini un tenseur métrique qui n'est pas nécessairement solution des équations du vide. Les coordonnées

qui définissent (Ω) étant radiatives, les composantes $g_{\alpha\beta}$ satisfont (4-2) en tout point de (Ω) .

b) Le comportement asymptotique du tenseur métrique sur (Ω) est donné par (5-1).

c) Les $g_{\alpha\beta}$ sont, en tout point de (Ω) , développables en séries entières de $\frac{1}{r}$.

Les hypothèses a), b), c) sont encore caractérisées par l'existence des six fonctions $\bar{\gamma}, \bar{\delta}, \bar{\beta}, \bar{\mathcal{U}}, \bar{\mathcal{W}}, \bar{\mathcal{V}}$ et de leurs développements dont dépendent les $g_{\alpha\beta}$ non nuls donnés par (3-4). Les développements de $\bar{\gamma}, \bar{\delta}, \bar{\beta}$ sont encore donnés par (2-1), (2-2), (2-3) dont toutes les quantités seront barrées, alors que ceux de $\bar{\mathcal{U}}, \bar{\mathcal{W}}, \bar{\mathcal{V}}$ sont :

$$\bar{\mathcal{U}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{\mathcal{U}}_n}{\bar{r}^n}, \quad \bar{\mathcal{W}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{\mathcal{W}}_n}{\bar{r}^n}, \quad \bar{\mathcal{V}} = \frac{\bar{\mathcal{V}}_1}{\bar{r}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{\mathcal{V}}_n}{\bar{r}^n}.$$

Nous désignons par changement de coordonnées (T') tout changement de coordonnées défini sur (Ω) :

$$(5-8) \quad \begin{cases} u = u(\bar{u}, \bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\phi}) \\ r = r(\bar{u}, \bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\phi}) \\ \theta = \theta(\bar{u}, \bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\phi}) \\ \phi = \phi(\bar{u}, \bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\phi}) \end{cases}$$

qui conserve les hypothèses a) b) c) et qui soit tel que u, r, θ, ϕ soient développables en séries entières de $\frac{1}{r}$.

Soulignons que la définition d'un changement de coordonnées (T') ne diffère de celle d'un changement de coordonnées (T) que par le fait qu'elle conserve la forme du comportement asymptotique

$$\lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \left(\frac{g_{00}}{\bar{r}^2} \right) = 0 = \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \left(\frac{g_{0A}}{\bar{r}^2} \right)$$

au lieu de :

$$\lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} (g_{00}) = 1, \quad \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \left(\frac{g_{0A}}{\bar{r}} \right) = 0$$

3. Étude des changements de coordonnées (T').

Supposons qu'il existe un changement de coordonnées (T') donné par (5-8). Désignons par $g_{\alpha\beta}$ les composantes du tenseur métrique en un point $M \in (\Omega)$ dans le nouveau système de coordonnées radiatives. En vertu du théorème (C), (5-8) satisfait (4-6) et d'après la condition suffisante du théorème (D) les coefficients u, r, θ, ϕ dans (4-6) satisfont (5-4), (5-3), (5-2). La détermination des autres coefficients u, r, θ, ϕ pour $n \geq 1$ et la preuve de l'existence des transformations (T') s'obtiennent par la méthode utilisée dans [3] pour les transformations (T). Elle utilise l'identification des coefficients de $\frac{1}{r^n}$ dans les développements des membres de :

$$(5-9) \quad g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\bar{\alpha}}} \cdot \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\bar{\beta}}} g_{\rho\sigma}.$$

Sous certaines conditions, on peut en effet, développer en série entière de $\frac{1}{r}$ chaque membre de (5-9). Par hypothèse les $g_{\alpha\beta}$ non nuls admettent un développement en série entière qui débute par :

$$(5-10) \quad \left\{ \begin{aligned} g_{00} &= \frac{-1}{\bar{U}r} + \left(\frac{0}{\bar{U}} + \frac{1-1}{2\bar{\beta}\bar{U}} - \frac{0}{\bar{U}}^2 - \frac{0}{\bar{W}}^2 \right) + \dots; & g_{01} &= 1 + \frac{2\bar{\beta}}{r} + \dots; \\ \frac{g_{02}}{r} &= \frac{0}{\bar{U}} + \left(2\gamma \frac{0}{\bar{U}} + \frac{1}{\bar{U}} - 2\frac{0}{\bar{W}}\frac{1}{\bar{\delta}} \right) \frac{1}{r} + \dots; \\ \frac{g_{03}}{r} &= \frac{0}{\bar{W}} \sin \bar{\theta} + \left(-2\gamma \frac{0}{\bar{W}} + \frac{1}{\bar{W}} + 2\frac{0}{\bar{U}}\frac{1}{\bar{\delta}} \right) \sin \bar{\theta} \cdot \frac{1}{r} + \dots; \\ \frac{g_{22}}{r^2} &= -1 - \frac{2\gamma}{r} + \dots; & \frac{g_{33}}{r^2} &= -\sin^2 \bar{\theta} + \frac{2\gamma \sin^2 \bar{\theta}}{r} + \dots; \\ & & \frac{g_{23}}{r^2} &= -\frac{2\bar{\delta} \sin \bar{\theta}}{r} + \dots; \end{aligned} \right.$$

De même, le $g_{\alpha\beta}$ ont un développement analogue en $\frac{1}{r}$, les quantités étant non barrées. Supposons en outre que sur (ω) , les $g_{\alpha\beta}$ sont développables en série de Taylor par rapport aux variables $\theta, \phi, u, \frac{1}{r}$. Ceci exige que le

tenseur métrique et les changements de coordonnées (T'), en plus de leur analyticité en $\frac{1}{r}$, soient de classe c^∞ sur (Ω) . Alors on peut développer les $g_{\alpha\beta}$ en tout point $M \in (\Omega)$ en série entière de $\frac{1}{r}$ en utilisant (4-6). On a :

$$(5-11) \quad \left\{ \begin{aligned} g_{00} &= \overset{-1}{\mathcal{U}} \overset{1}{u}, \overset{0}{\theta}, \overset{0}{\phi} rr + \{ \overset{-1}{\mathcal{U}} \overset{1}{u}, \overset{0}{\theta}, \overset{0}{\phi} r + [\overset{-1}{\mathcal{U}}_0 u + \overset{-1}{\mathcal{U}}_2 \theta + \overset{-1}{\mathcal{U}}_3 \phi] r \\ &\quad + \overset{0}{\mathcal{U}} + 2\overset{1}{\beta} \overset{-1}{\mathcal{U}} - \overset{0}{\mathcal{U}}^2 - \overset{0}{\mathcal{W}}^2 \} + \dots; \\ g_{01} &= 1 + \frac{2\overset{1}{\beta}}{\overset{0}{r}} \cdot \frac{1}{\overset{0}{r}} + \dots; \quad \frac{g_{02}}{\overset{0}{r}} = \overset{0}{\mathcal{U}} \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{\overset{0}{r}} (2\overset{1}{\gamma} \overset{0}{\mathcal{U}} + \overset{1}{\mathcal{U}} + 2\overset{0}{\mathcal{W}} \delta) + \overset{0}{\mathcal{U}}_0 u + \overset{0}{\mathcal{U}}_2 \theta + \overset{0}{\mathcal{U}}_3 \phi \right\} \frac{1}{\overset{0}{r}} + \dots; \\ \frac{g_{03}}{\overset{0}{r}} &= \overset{0}{\mathcal{W}} \sin \overset{0}{\theta} + \left\{ \frac{1}{\overset{0}{r}} (-2\overset{1}{\gamma} \overset{0}{\mathcal{W}} + \overset{1}{\mathcal{W}} + 2\overset{0}{\mathcal{U}} \delta) \sin \overset{0}{\theta} \right. \\ &\quad \left. + \sin \overset{0}{\theta} \overset{0}{\mathcal{W}}_0 u + (\overset{0}{\mathcal{W}}_2 \sin \overset{0}{\theta} + \overset{0}{\mathcal{W}} \cos \overset{0}{\theta}) \theta + \overset{0}{\mathcal{W}}_3 \sin \overset{0}{\theta} \phi \right\} \frac{1}{\overset{0}{r}} + \dots; \\ \frac{g_{22}}{\overset{0}{r}^2} &= -1 - \frac{2\overset{1}{\gamma}}{\overset{0}{r} \overset{0}{r}} + \dots; \quad \frac{g_{33}}{\overset{0}{r}^2} = -\sin^2 \overset{0}{\theta} \\ &\quad + 2 \left(\sin \overset{0}{\theta} \overset{0}{\gamma} + \overset{1}{\theta} \cos \overset{0}{\theta} \right) \frac{\sin \overset{0}{\theta}}{\overset{0}{r}} + \dots; \quad \frac{g_{23}}{\overset{0}{r}^2} = \frac{-2\overset{1}{\delta} \sin \overset{0}{\theta}}{\overset{0}{r} \overset{0}{r}} + \dots; \end{aligned} \right.$$

(4-6) et (5-11) permettent enfin d'obtenir le développement en série du second membre de (5-9).

Détermination des coefficients u, r, θ, ϕ pour $n \geq 1$.

Elle s'effectue en appliquant cette méthode d'identification à $g_{1\bar{A}}, g_{\bar{1}1}, g_{2\bar{2}}, g_{\bar{3}3} - (g_{23})^2$ qui satisfont (4-2). De l'identification des termes en $\frac{1}{r^n}$ dans (5-9) où $g_{\alpha\bar{\beta}} = g_{1\bar{A}}$ nous déduisons les deux relations :

$$(5-12) \quad \overset{n}{\theta} \overset{0}{\theta}_{\bar{A}} + \overset{n}{\phi} \overset{0}{\phi}_{\bar{A}} \sin^2 \overset{0}{\theta} = \overset{n}{G}_{\bar{A}}(u, r, \theta, \phi) \quad \text{avec} \quad i, j, k, l \leq n-1,$$

où $\overset{n}{G}_{\bar{A}}$ sont deux fonctions des u, r, θ, ϕ et des coefficients des développe-

ments de γ , δ , β , $\mathcal{U}$, $\mathcal{W}$, $\mathcal{V}$. De même de l'identification des termes en $\frac{1}{r^{n+1}}$ dans (5-9) où $g_{\alpha\beta} = g_{11}$ nous obtenons :

$$(5-13) \quad (r)^2 u = H(u, r, \theta, \phi) \quad \text{avec} \quad i, k, l \leq n; j \leq n-1;$$

où H est une fonction des u, r, θ, ϕ et des développements de $\gamma, \delta, \beta, \mathcal{U}, \mathcal{W}, \mathcal{V}$. Ensuite, dans

$$(5-14) \quad g_{22} \cdot g_{33} - (g_{23})^2 = r^4 \sin^2 \theta$$

on remplace g_{22} , g_{33} et g_{23} par leur développement donné par le second membre de (5-9). De l'identification des termes en $\frac{1}{r^n}$ de (5-14) on a :

$$(5-15) \quad \frac{r^n}{r} = I(u, r, \theta, \phi) \quad \text{avec} \quad i, k, l \leq n; j \leq n-1,$$

où I est une fonction des u, r, θ, ϕ et des développements de $\gamma, \delta, \beta, \mathcal{U}, \mathcal{W}, \mathcal{V}$. Comme pour les transformations (T), démontrons que les coefficients u, r, θ, ϕ pour $n \geq 1$ sont déterminés par la donnée de u, r, θ, ϕ et de

$\gamma, \delta, \beta, \mathcal{U}, \mathcal{W}, \mathcal{V}$. En effet, pour $n = 1$, (5-12) donne θ et ϕ en fonction de u, r, θ, ϕ et la connaissance de $u, r, \theta, \phi, \theta, \phi$ dans (5-13) et (5-15) détermine u et r , r n'étant pas nul. Plus généralement la connaissance de u, r, θ, ϕ ($i \leq n$) dans (5-12) détermine θ et ϕ et celle de u, r, θ, ϕ ($i \leq n$) dans (5-13) et (5-15) détermine u et r . Remarquons que les relations (5-12) et (5-13) pour $n = 1$ sont celles qui ont été obtenues pour les transformations (T). Les valeurs de θ et ϕ sont donc celles qui ont été trouvées pour les transformations (T),

$$(5-16) \quad \begin{cases} \theta = -r \left(u_2 \theta_2 + \frac{u_3 \theta_3}{\sin^2 \theta} \right) \\ \phi = -r \left(u_2 \phi_2 + \frac{u_3 \phi_3}{\sin^2 \theta} \right) \end{cases}$$

Il n'en est pas de même pour r puisque pour $n = 1$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{U}$ et $\mathcal{W}$ apparaissent dans (5-15).

Remarquons en outre que ce changement de coordonnées dont nous venons de déterminer les coefficients est inversible sur un domaine (Ω) puisque son jacobien est non nul sur le domaine à l'infini (ω), d'après (5-3).

Existence des transformations (T').

Nous nous intéressons ici à l'existence des séries formelles définissant (T') sans nous préoccuper de la convergence de ces séries. Cette existence est prouvée en utilisant la méthode d'identification des coefficients de $\frac{1}{r^n}$ du développement des membres de (5-9) où $g_{\alpha\beta}$ prend successivement les autres valeurs : g_{ik} , g_{0A} , g_{AB} . Toutes les relations ainsi obtenues ne servent qu'à déterminer les six fonctions $\bar{\gamma}$, $\bar{\delta}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\mathcal{U}}$, $\bar{\mathcal{W}}$, $\bar{\mathcal{V}}$ en fonction de ces six fonctions non barrées et des coefficients de (T').

En effet, l'identification des termes en $\frac{1}{r^n}$ ($n \geq 1$) appliquée successivement à g_{01} , $\frac{g_{23}}{r^2}$, $\frac{g_{22}}{r^2}$ détermine successivement $\bar{\beta}$, $\bar{\delta}$ et $\bar{\gamma}$. Cette identification appliquée à $\frac{g_{33}}{r^2}$ est alors identiquement satisfaite à cause de (5-14), appliquée ensuite simultanément à $\frac{g_{02}}{r}$ et $\frac{g_{03}}{r}$ mais pour $n \geq 0$, elle donne $\bar{\mathcal{U}}$ et $\bar{\mathcal{W}}$ et enfin appliquée à g_{00} et cette fois pour $n \geq -1$, elle détermine $\bar{\mathcal{V}}$.

Soulignons en quoi ces résultats diffèrent de ceux obtenus pour les transformations (T). Dans le cas des transformations (T), l'identification des termes indépendants de $\bar{r}$ dans (5-9) pour $g_{\alpha\beta} = g_{0A}$ donne les deux relations :

$$(5-17) \quad \overset{1}{u}_0 \overset{0}{r}_A - \left(\overset{1}{\theta}_0 \overset{0}{\theta}_A + \overset{1}{\phi}_0 \overset{0}{\phi}_A \sin^2 \overset{0}{\theta} \right) (\overset{0}{r})^2 = 0,$$

et l'identification des termes en $\bar{r}$ et ensuite des termes indépendants de $\bar{r}$ dans (5-9) pour $g_{\alpha\beta} = g_{00}$ donne :

$$(5-18) \quad \overset{1}{u}_0 \overset{0}{r}_0 = 0,$$

$$(5-19) \quad (\overset{1}{u}_0)^2 + 2 \overset{1}{r}_0 \overset{1}{u}_0 - (\overset{0}{r})^2 \left[(\overset{1}{\theta}_0) + (\overset{1}{\phi}_0) \sin^2 \overset{0}{\theta} \right] = 1.$$

Rappelons que (5-17), (5-18), (5-19) qui ne font intervenir que des coefficients des changements de coordonnées (T) sont identiquement vérifiées. Remarquons que les relations (5-17) et (5-18) qui ne font intervenir que

$u, r, \theta, \phi, \bar{u}, \bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\phi}$ sont également vérifiées dans le cas des changements de coordonnées (T').

Dans le cas des transformations (T'), l'identification des termes indépendants de $\bar{r}$ dans (5-9) pour $g_{\alpha\bar{\beta}} = g_{0A}$ donne cette fois, compte tenu de (5-17),

$$(5-20) \quad \begin{cases} u_2^{-1} \bar{u} + \theta_2^0 \bar{u} + \phi_2^0 \bar{u} = \bar{u} \\ u_3^{-1} \bar{u} + \theta_3^0 \bar{u} + \phi_3^0 \bar{u} = \bar{u}, \end{cases}$$

et l'identification des termes en $\bar{r}$ et ensuite des termes indépendants de $\bar{r}$ dans (5-9) pour $g_{\alpha\bar{\beta}} = g_{00}$ donne :

$$(5-21) \quad \frac{\bar{u}^{-1}}{r} = \bar{u}^{-1}$$

dans laquelle on a tenu compte de (5-18),

$$(5-22) \quad 2u_0^{-1} r \bar{u} + 2u_0^{-1} r \bar{u} + (u_0^{-1})^2 [\bar{u}^{-1} r + r (\bar{u}_0^{-1} u + \bar{u}_2^{-1} \theta + \bar{u}_3^{-1} \phi) + \bar{u} + 2\beta \bar{u} - (\bar{u})^2 - (\bar{u})^2] + 2u_0^{-1} r (\theta_0^0 \bar{u} + \phi_0^0 \bar{u}) - (r)^2 [(\theta_0^0)^2 + (\phi_0^0)^2 \sin^2 \theta] = \bar{u}.$$

Donc les relations (5-17), (5-18), (5-19) qui sont identiquement vérifiées dans le cas des transformations (T) sont remplacées, dans le cas des transformations (T') par (5-20), (5-21) et (5-22) qui déterminent cette fois, $\bar{u}, \bar{u}, \bar{u}^{-1}$ et $\bar{u}$.

Comme conséquence de ceci, démontrons que les changements de coordonnées (T') conservent les valeurs particulières $\bar{u}^{-1} = 0$, $\bar{u} = 1$, $\bar{u} = \bar{u} = 0$, c'est-à-dire que si les développements des composantes g_{00} et g_{0A} du tenseur métrique dans un système de coordonnées radiatives satisfont $\bar{u}^{-1} = 0$, $\bar{u} = 1$, $\bar{u} = \bar{u} = 0$, après un changement de coordonnées (T') quelconque les développements des nouvelles composantes satisferont $\bar{u}^{-1} = 0$, $\bar{u} = 0$, $\bar{u} = \bar{u} = 0$. Les changements de coordonnées (T') sont alors les changements de coordonnées (T).

Faisons la démonstration. D'après (5-21) $\bar{u}^{-1} = 0$ est conservé par les changements de coordonnées (T'), r étant non nul. Examinons le cas où

$\overset{-1}{\mathcal{U}} = 0$. D'après (5-20), $\overset{0}{\theta}_2 \overset{0}{\phi}_3 - \overset{0}{\phi}_2 \overset{0}{\theta}_3$ n'étant pas nul, le système ($\overset{0}{\mathcal{U}} = 0$, $\overset{0}{\mathcal{W}} = 0$) est également conservé par ces changements de coordonnées.

Dans l'hypothèse

$$(5-23) \quad \overset{-1}{\mathcal{U}} = 0, \quad \overset{0}{\mathcal{U}} = 0, \quad \overset{0}{\mathcal{W}} = 0,$$

le coefficient $\overset{1}{r}$ a la même expression que celui des changements de coordonnées (T).

On peut donc tenir compte de (5-19) dans (5-22) qui s'écrit avec (5-3)

$$\left(\frac{1}{\overset{0}{r}}\right)^2 (\overset{0}{\mathcal{U}} - 1) + 1 = \overset{0}{\mathcal{U}}$$

Ceci prouve que, sous l'hypothèse (5-23), tout changement de coordonnées (T') conserve $\overset{0}{\mathcal{U}} = 1$, ce qui démontre la proposition.

VI. LES TRANSFORMATIONS DE BONDI-METZNER-SACHS DANS LE CAS OU LE TENSEUR MÉTRIQUE SATISFAIT LES ÉQUATIONS DU VIDE

Les changements de coordonnées (T) laissent invariantes les équations du vide du paragraphe 2 : équations principales et équations supplémentaires. Nous savons qu'une solution $(\gamma, \delta, \beta, \mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W})$ est déterminée par la donnée de quatre fonctions arbitraires de trois variables : $\gamma(u = {}_0u, \theta, \phi, r)$, $\delta(u = {}_0u, \theta, \phi, r)$, $\overset{1}{\gamma}_0(u, \theta, \phi)$ et $\overset{1}{\delta}_0(u, \theta, \phi)$ et la donnée des trois fonctions arbitraires de deux variables θ et ϕ dont dépendent les fonctions $\overset{1}{\mathcal{U}}$, $\overset{2}{\mathcal{U}}$, $\overset{2}{\mathcal{W}}$. Toutes les transformées de ces fonctions par les changements de coordonnées (T) représentent la même solution. Nous avons vu que les coefficients $\overset{n+1}{u}$, $\overset{n}{r}$, $\overset{n}{\theta}$, $\overset{n}{\phi}$, pour $n > 1$, dépendent du tenseur métrique; donc si ce dernier satisfait les équations du vide, $\overset{n+1}{u}$, $\overset{n}{r}$, $\overset{n}{\theta}$ ne dépendent que de $\overset{1}{\gamma}$, $\overset{1}{\delta}$, $\overset{1}{\mathcal{U}}$, $\overset{2}{\mathcal{U}}$ et $\overset{2}{\mathcal{W}}$, si $\gamma(u = {}_0u, r, \theta, \phi)$, $\delta(u = {}_0u, r, \theta, \phi)$ sont données. Nous avons vu dans le paragraphe 2 que $\overset{1}{\beta} = \overset{2}{\gamma} = \overset{2}{\delta} = 0$, et ceci est invariant ⁽¹⁾ par (T).

⁽¹⁾ On démontre que $\overset{1}{\beta} = 0$ est conservé par les changements de coordonnées (T) même si le tenseur métrique n'est pas solution des équations du vide.

Nous allons préciser la structure des coefficients $u^{n+1}, r^n, \theta^n, \phi^n$, pour $n > 1$, en précisant celle des composantes $g_{\rho\sigma}$ du tenseur métrique dans (5-9).

Rappelons que les $g_{ik}, \frac{g_{iA}}{r}, \frac{g_{AB}}{r^2}$ sont des fonctions F (1). Nous avons besoin de développer une fonction F des variables u, r, θ, ϕ en séries entières de $\frac{1}{r}$.

Nous utiliserons les deux théorèmes suivants :

1) La dérivée d'ordre n par rapport à r d'une fonction F est égale au produit de $\frac{1}{r^n}$ par une fonction F .

Ceci découle immédiatement de la dérivation d'une fonction ψ et de la définition de F .

2) La dérivée d'ordre n d'une fonction F par rapport à u est une somme de produits dont les facteurs sont des fonctions ψ , les $\frac{\mathcal{U}^2}{r^2}, \frac{\mathcal{W}^2}{r^2}, \frac{\mathcal{V}}{r}, \left(r^{i-1} \cdot \frac{\partial^i \gamma}{\partial u^i}\right), \left(r^{i-1} \cdot \frac{\partial^i \delta}{\partial u^i}\right)$, pour $1 \leq i \leq n$ et des dérivées partielles de ces fonctions par rapport à θ et ϕ .

Démontrons-le. Écrivons F sous la forme :

$$(6-1) \quad F = \sum_m \psi_m \mathcal{A}_m,$$

où ${}_m \mathcal{A}$ est l'une des fonctions suivantes :

$$(6-2) \quad 1, \frac{\mathcal{V}}{r}, \frac{\mathcal{U}^2}{r^2}, \frac{\mathcal{U}^2}{r^2}, \frac{\mathcal{W}^2}{r^2}, \frac{\mathcal{W}^2}{r^2}, \frac{\mathcal{W}^2}{r^2}, \frac{(\mathcal{U})^2}{r^4}, \frac{\mathcal{U}^2 \mathcal{W}^2}{r^4}$$

et où certaines fonctions ψ peuvent être nulles. Notons que l'indice m de la fonction ψ ne précise pas cette fonction. Dans cette démonstration, deux fonctions ${}_m \psi$ ayant le même indice ne sont pas égales en général. Nous tirons de (6-1)

$$(6-3) \quad F_0 = \sum_m \psi_m \mathcal{A}_0 + \sum_m \psi_0 \mathcal{A}_m.$$

L'expression de ${}_m \mathcal{A}_0$ est donnée par les équations du champ dites supplé-

(1) Les définitions des fonctions F et ψ sont données dans le paragraphe 2.

mentaires (2-33), (2-34) et (2-35) que nous écrivons sous la forme suivante ⁽¹⁾:

$$(6-4) \quad \begin{cases} \frac{{}^1\mathcal{V}_0}{r} = \frac{1}{r} [\psi({}^1\gamma_0)^2 + \psi({}^1\delta_0)^2 + \psi\gamma_0 + \psi\delta_0] \\ \frac{{}^2\mathcal{U}_0}{r^2} = \frac{1}{r} \left[\psi \frac{{}^1\mathcal{V}}{r} + \psi\gamma_0 + \psi\delta_0 + \psi \right] \\ \frac{{}^2\mathcal{W}_0}{r^2} = \frac{1}{r} \left[\psi \frac{{}^1\mathcal{V}}{r} + \psi\gamma_0 + \psi\delta_0 + \psi \right]. \end{cases}$$

Pour alléger l'écriture des relations (6-4) nous avons adopté la notation suivante dans les seconds membres : Chacune des fonctions γ_0 , δ_0 , $\frac{{}^1\mathcal{V}}{r}$ désigne en fait une combinaison linéaire d'elle-même et de ses dérivées partielles par rapport à θ et ϕ , les coefficients étant des fonctions ψ . Par exemple γ_0 signifie $\psi\gamma_0 + \psi\gamma_{0A} + \psi\gamma_{0AB} + \dots$ où certaines fonctions ψ peuvent être nulles. Remarquons que les dérivées de $\frac{{}^1\mathcal{V}_0}{r}$, $\frac{{}^2\mathcal{U}_0}{r^2}$, $\frac{{}^2\mathcal{W}_0}{r^2}$ par rapport à θ et ϕ obtenues en dérivant les seconds membres de (6-4) s'écrivent, dans cette notation, comme les seconds membres de (6-4). Nous étendons donc cette notation au premier membre de (6-4) et nous l'appliquons également dans la suite de la démonstration. Nous déduisons donc de (6-4)

$$(6-5) \quad \Sigma_m \psi_m \mathcal{A} + \frac{1}{r} \left[\psi({}^1\gamma_0)^2 + \psi({}^1\delta_0)^2 + {}_1\mathcal{B}\gamma_0 + {}_2\mathcal{B}\delta_0 + {}_3\mathcal{B}\frac{{}^1\mathcal{V}}{r} + {}_4\mathcal{B} \right],$$

où les ${}_i\mathcal{B}$ sont des fonctions F de la forme $\psi + \psi \frac{{}^2\mathcal{U}}{r^2} + \psi \frac{{}^2\mathcal{W}}{r^2}$. D'autre part la définition et les propriétés d'une fonction ψ , les relations (2-26) déduites des équations du champ et la définition (6-1), permettent d'écrire ψ_0 sous la forme

$$(6-6) \quad \psi_0 = \frac{1}{r} [\psi\gamma_0 + \psi\delta_0 + \Sigma_m \psi_m \mathcal{A}].$$

Introduisons (6-5) et (6-6) dans (6-3). En remplaçant $\Sigma_m \psi_m \mathcal{A} + \mathcal{B}$ par $\Sigma_m \psi_m \mathcal{A} = F$, F_0 s'écrit :

$$(6-7) \quad F_0 = \frac{1}{r} [\gamma_0(\psi\gamma_0 + F) + \delta_0(\psi\delta_0 + F) + S^2],$$

⁽¹⁾ Les fonctions ψ et F entrant dans ces relations et les suivantes sont toutes différentes.

où S^2 est une somme de produits dont les facteurs sont ψ et ${}_m\mathcal{A}$. Prenons les dérivées successives par rapport à u des membres de (6-7). En utilisant à chaque dérivation (6-4), (6-6), (6-7) nous trouvons :

$$(6-8) \quad \frac{\partial^n F}{\partial u^n} = \frac{1}{r^n} \left[\left(r^{n-1} \frac{\partial^n \gamma}{\partial u^n} \right) (\psi \gamma_0 + F) + \left(r^{n-1} \frac{\partial^n \delta}{\partial u^n} \right) (\psi \delta_0 + F) + S^{n+1} \right]$$

où S^{n+1} est une somme de produits dont les facteurs sont, toujours avec les notations utilisées, ψ , ${}_m\mathcal{A}$, γ_0 , δ_0 , $(r \cdot \gamma_{00})$, $(r \cdot \delta_{00})$, ..., $\left(r^{n-2} \cdot \frac{\partial^{n-1} \gamma}{\partial u^{n-1}} \right)$, $\left(r^{n-2} \cdot \frac{\partial^{n-1} \delta}{\partial u^{n-1}} \right)$.

Ceci démontre le théorème.

Remarquons que le théorème précédent est encore valable quand F est remplacé par une dérivée de F par rapport à θ et ϕ .

Développons maintenant une fonction $F(u, r, \theta, \phi)$ en série entière de $\frac{1}{r}$ par un développement de Taylor sur (ω) dont l'équation est $\frac{1}{r} = 0$

$$(6-9) \quad F(u, r, \theta, \phi) = F(u, r\bar{r}, \theta, \phi) + \{ h^{a_1} F_{a_1} \} + \dots + \left\{ \frac{1}{n!} h^{a_1} \cdot h^{a_2} \dots h^{a_n} F_{a_1 a_2 \dots a_n} \right\} + \dots$$

avec $h^0 = \bar{r}a$, $h^1 = \bar{r}\rho$, $h^2 = b$, $h^3 = c$; a , ρ , b , c sont données par (A, 1). Tenons compte des théorèmes précédents et de (6-8) dans (6-9) nous obtenons :

$$(6-10) \quad \begin{aligned} F(u, r, \theta, \phi) = & F(u, r\bar{r}, \theta, \phi) + \left\{ [\gamma_0(\psi\gamma_0 + F) + \delta_0(\psi\delta_0 + F) + S^2] \frac{a}{r} \right. \\ & + F \frac{\rho}{r} + F_2 b + F_3 c \left. \right\} + \frac{1}{2} \left\{ [r\gamma_{00}(\gamma_0 + F) + r\delta_{00}(\delta_0 + F) + S^3] \frac{a^2}{r^2} \right. \\ & + F \frac{\rho^2}{r^2} + F_{22} b^2 + F_{33} c^2 + \dots \left. \right\} + \dots + \left\{ \frac{1}{n!} h^{a'_1} \cdot h^{a'_2} \dots h^{a'_n} F_{a'_1 a'_2 \dots a'_n} \right\} + \dots \end{aligned}$$

où $rh^{0'} = a$, $rh^{1'} = \rho$, $h^{2'} = b$, $h^{3'} = c$, et où $F_{a'_1 a'_2 \dots a'_n}$ est, soit une fonction F , soit le produit par r^q d'une dérivée $p^{\text{ième}}$ d'une fonction F par rapport

à l'ensemble des variables u, θ, ϕ ; q est l'ordre de la dérivation par rapport à la variable u ; q et p satisfont :

$$0 \leq q \leq p, \quad 0 \leq p \leq n.$$

$F_{\alpha'_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_n}$ est donc une somme de produits dont les facteurs ne peuvent être que :

une fonction ψ , les ${}_m \mathcal{A}$ définis par (6-2), $\left(r^{i-1} \cdot \frac{\partial^i \gamma}{\partial u^i}\right), \left(r^{i-1} \cdot \frac{\partial^i \delta}{\partial u^i}\right)$, avec $1 \leq i \leq n$, et des dérivées partielles de ces fonctions par rapport à θ et ϕ .

Si nous attribuons à $\frac{\partial^i \gamma}{\partial u^i}$ ou $\frac{\partial^i \delta}{\partial u^i}$ l'indice $(i-1)$ pour $i \geq 1$, alors $F(u, r, \theta, \phi)$ dans (6-10) est mis sous une forme qui présente la propriété suivante : les facteurs qui apparaissent dans chaque terme de la somme sont tous des séries entières de $\frac{1}{r}$ dont le coefficient du terme en $\frac{1}{r^n}$ a pour indice n . Notons que pour les séries qui apparaissent dans $F_{\alpha'_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_n}$ le coefficient du terme en $\frac{1}{r^n}$ dont l'indice est n est multiplié par $\frac{1}{0^n}$. Par exemple le coefficient du terme est $\frac{1}{r^n}$ du facteur $\psi(u, r, \theta, \phi)$ est :

$$\frac{\psi(u, \theta, \phi)}{(r)^n}.$$

Cette propriété des fonctions F , donc des $g_{ik}, \frac{g_{iA}}{r}, \frac{g_{AB}}{r^2}$, est également vraie pour les autres facteurs qui apparaissent dans les 2^o membres de (5-9), comme on peut le vérifier dans la première partie de l'appendice pour $g_{\alpha\beta} = g_{1A}$. Il résulte donc de cette structure que dans (5-12), (5-13) et (5-15) ⁽¹⁾ les fonctions $\overset{n}{G}_A, \overset{n+1}{H}, \overset{n}{I}$ sont des sommes dont les produits qui en constituent les termes possèdent la propriété suivante :

la somme des indices des facteurs de chaque produit est n pour $\overset{n}{G}_A$ et $\overset{n+1}{H}$ et $n+1$ pour $\overset{n+1}{H}$.

⁽¹⁾ La structure des relations (5-12) (5-13) est valable pour les changements de coordonnées (T).

Rappelons que ces facteurs appartiennent à la liste :

$$(6-11) \left\{ \begin{array}{l} \frac{q}{(r)^q}, \frac{1}{r}, \frac{2}{(r)^2}, \frac{2}{(r)^2}, \frac{(0)}{1}, \frac{(-1)}{0}, \frac{(0)}{1}, \frac{(-1)}{0}, \frac{(0)}{1}, \frac{(-1)}{0}, \gamma_0, r, \gamma_{00}, \dots, \delta_0, r, \delta_{00}, \dots, \\ \text{et leurs dérivées partielles par rapport à } \theta \text{ et } \phi. \\ u, r, \theta, \phi \text{ et leurs dérivées partielles par rapport à } \bar{\theta} \text{ et } \bar{\phi}. \end{array} \right.$$

Rappelons aussi que les u, r, θ, ϕ pour $i \geq 1$ se calculent à partir des u, r, θ, ϕ et des fonctions de la première ligne de (6-11) par la méthode qui a été exposée au paragraphe 5 pour les changements de coordonnées (T'). Il en résulte donc que dans les G_A^n, H^n, I^n , les u, r, θ, ϕ peuvent être remplacés par leur valeur en fonction de u, r, θ, ϕ . La structure des relations (5-12), (5-13), (5-15) donne alors le résultat suivant :

Dans le cas où le tenseur métrique est solution des équations du vide chaque coefficient u, r, θ, ϕ d'un changement de coordonnées (T) défini sur (Ω) est une somme de termes constitués par des produits. Les facteurs de ces produits appartiennent à la liste (6-11) dans laquelle l'indice i ne prend que la valeur zéro. La somme des indices des facteurs d'un produit quelconque est égale à n .

Dans le cas particulier du champ « non-radiatif » ce résultat devient en tenant compte de (3-1), (3-2), (3-3) et (5-3) :

THÉORÈME E.

Dans le cas d'un champ « non-radiatif » défini sur (Ω) les coefficients u, r, θ, ϕ dans (4-6) d'un changement de coordonnées (T) sont des polynômes en $\bar{u}$ dont le degré est au plus égal à n , les coefficients de ces polynômes ⁽¹⁾ étant des fonctions de $\bar{\theta}$ et $\bar{\phi}$.

⁽¹⁾ Rappelons que u^n est un polynôme en $\bar{u}$ dont le degré est n quel que soit (T) pour $n = 1, n = 2$.

APPENDICE

1. FORME DES EXPRESSIONS (5-9).

Précisons d'abord les notations utilisées.

Nous écrivons (4-6) comme suit :

$$u = r \left[\frac{1}{r} u + a \right]$$

$$r = \bar{r}^0 [r + \rho]$$

$$\theta = \bar{\theta}^0 + b$$

$$\Phi = \bar{\Phi}^0 + c$$

où

(A, 1)

$$\left\{ \begin{aligned} a &\equiv \frac{2}{r^2} u + \frac{3}{r^3} u + \dots \\ \rho &\equiv \frac{1}{r} r + \frac{2}{r^2} r + \dots \\ b &\equiv \frac{1}{r} \bar{\theta} + \frac{2}{r^2} \bar{\theta} + \dots \\ c &\equiv \frac{1}{r} \bar{\Phi} + \frac{2}{r^2} \bar{\Phi} + \dots \end{aligned} \right.$$

et nous posons :

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{r}} = a' \quad \text{avec} \quad a' \equiv -\frac{2}{r^2} u - \frac{2r}{r^3} u - \dots,$$

$$\frac{\partial r}{\partial \bar{r}} = \bar{r}^0 + \rho' \quad \text{avec} \quad \rho' \equiv -\frac{2}{r^2} r - \frac{2r}{r^3} r - \dots,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \bar{r}} = \frac{1}{r} b' \quad \text{avec} \quad b' \equiv -\frac{1}{r} \bar{\theta} - \frac{2\bar{\theta}}{r^2} - \dots,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \bar{r}} = \frac{1}{r} c' \quad \text{avec} \quad c' \equiv -\frac{1}{r} \bar{\Phi} - \frac{2\bar{\Phi}}{r^2} - \dots,$$

(5-9) devient pour $g_{\alpha\beta} = g_{1A}$:

$$(A, 2) \quad \frac{g_{1A}}{r} = a' \left(\frac{u_A^-}{r} + a_A^- \right) g_{00} + \left[a' (r_A^- + \rho_A^-) + (r + \rho') \left(\frac{u_A^-}{r} + a_A^- \right) \right] g_{01} + [a' (\theta_A^- + b_A^-) + b' \left(\frac{u_A^-}{r} + a_A^- \right)] (r + \rho) \frac{g_{02}}{r} + \left[a' (\Phi_A^- + c_A^-) + c' \left(\frac{u_A^-}{r} + a_A^- \right) \right] (r + \rho) \frac{g_{03}}{r} + b' (\theta_A^- + b_A^-) (r + \rho)^2 \frac{g_{22}}{r^2} + c' (\Phi_A^- + c_A^-) (r + \rho)^2 \frac{g_{33}}{r^2} + [b' (\Phi_A^- + c_A^-) + c' (\theta_A^- + b_A^-)] (r + \rho)^2 \frac{g_{23}}{r^2}.$$

Les seconds membres des autres $g_{\alpha\beta}$ s'explicitent de façon analogue.

2. TRANSFORMÉES DES FONCTIONS γ_0 ET δ_0 DANS UN CHANGEMENT DE COORDONNÉES DE BONDI-METZNER-SACHS QUELCONQUE ET DÉMONSTRATION DU LEMME DU PARAGRAPHE 2.

L'identification des termes en $\frac{1}{r}$ dans (5-9) pour $g_{\alpha\beta} = g_{22}$ donne $\frac{1}{\gamma}$ en fonction de γ et δ après avoir remplacé r par sa valeur tirée de l'expression analogue à (5-15) pour les transformations (T). De même l'identification des termes en $\frac{1}{r}$ dans (5-9) pour $g_{\alpha\beta} = g_{23}$ donne $\frac{1}{\delta}$ en fonction de γ et δ . On obtient en tenant compte de (5-2) :

$$(A, 3) \quad \left[\begin{aligned} & r \left[(\theta_2^-)^2 - (\Phi_2^-)^2 \sin^2 \theta \right] \gamma + r (2\theta_2^- \Phi_2^- \sin \theta) \delta + \frac{1}{2} \left\{ -u_2^- r_2^- + \frac{u_3^- r_3^-}{\sin^2 \theta} \right. \\ & + (r)^2 \left[\theta_2^- \frac{1}{r_2^-} + \Phi_2^- \frac{1}{r_2^-} \sin^2 \theta - \frac{\theta_3^- \frac{1}{r_3^-}}{\sin^2 \theta} - \Phi_3^- \frac{1}{r_3^-} \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} \right] + \sin \theta \cos \theta \frac{1}{\theta} \left[(\Phi_2^-)^2 - \frac{(\Phi_3^-)^2}{\sin^2 \theta} \right] \left. \right\} = \frac{1}{\gamma} \\ & r \left[2\epsilon \theta_2^- \Phi_2^- \sin \theta \right] \gamma - r \epsilon \left[(\theta_2^-)^2 - (\Phi_2^-)^2 \sin^2 \theta \right] \delta + \frac{1}{2} \left\{ u_2^- r_2^- + u_3^- r_3^- - (r)^2 \right. \\ & \left. \left[+ \theta_3^- \frac{1}{r_3^-} + \theta_2^- \frac{1}{r_3^-} + \Phi_3^- \frac{1}{r_3^-} \sin^2 \theta + \Phi_2^- \frac{1}{r_3^-} \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta \Phi_2^- \Phi_3^- \frac{1}{\theta} \right] \right\} = -\frac{1}{\delta}. \end{aligned} \right.$$

Écrivons (A, 3) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} A \gamma_0 + B \delta_0 + C &= \frac{1}{\gamma} & \text{où} & & A &\equiv [(\theta_2^-)^2 - (\Phi_2^-)^2 \sin^2 \theta] \\ -\epsilon B \gamma_0 + \epsilon A \delta_0 + D &= \frac{1}{\delta} & & & B &\equiv 2\theta_2^- \Phi_2^- \sin \theta. \end{aligned}$$

Dérivons les membres de (A, 3) par rapport à $\bar{u}$, nous obtenons :

$$(A, 4) \quad \begin{aligned} A \gamma_0 + B \delta_0 + C_0 &= \frac{1}{\gamma_0} \\ -\epsilon B \gamma_0 + \epsilon A \delta_0 + D_0 &= \frac{1}{\delta_0}. \end{aligned}$$

Démontrons que si $\overset{1}{u}, \overset{1}{r}, \overset{0}{\theta}, \overset{0}{\Phi}$ sont solutions de (5-2), (5-3), (5-4) alors C_0 et D_0 sont identiquement nuls.

En utilisant $\overset{1}{\theta}$ et $\overset{1}{\Phi}$ donnés par (5-16) et (5-2) et (5-3), $2C$ et D s'écrivent :

$$\begin{cases} 2C \equiv -\overset{0}{2}r\overset{0}{u}_2 + \frac{\overset{0}{2}r\overset{0}{u}_3}{\sin^2 \overset{0}{\theta}} - \overset{0}{1}r\overset{0}{u}_{22} + \overset{0}{r}\frac{\overset{0}{u}_{33}}{\sin^2 \overset{0}{\theta}} + \overset{0}{r} \cotg \overset{0}{\theta} \overset{1}{u}_3 \\ D \equiv \overset{0}{r}\overset{0}{u}_2 - \overset{0}{r}\overset{0}{u}_3 + \overset{0}{1}r\overset{0}{u}_{32} - \overset{0}{r} \cotg \overset{0}{\theta} \overset{1}{u}_3 \end{cases}$$

On a donc pour $2C_0$ et D_0 en tenant compte de (5-4)

$$(A, 5) \quad \begin{cases} 2C_0 \equiv \frac{\overset{0}{r}_{22}}{\overset{0}{r}} - \frac{\overset{0}{r}_{33}}{\overset{0}{r} \sin^2 \overset{0}{\theta}} - \cotg \overset{0}{\theta} \frac{\overset{0}{r}_2}{\overset{0}{r}} \\ D_0 \equiv -\frac{\overset{0}{r}_{23}}{\overset{0}{r}} + \frac{\overset{0}{r}_3}{\overset{0}{r}} \cotg \overset{0}{\theta} \end{cases}$$

Montrons que C_0 et D_0 sont identiquement nuls si nous remplaçons dans (A-5) $\overset{0}{r}$ par une solution de (5-2) et (5-3). La forme de cette solution peut être obtenue en se rappelant que $\overset{0}{\theta} = \overset{0}{\theta}(\bar{\theta}, \bar{\Phi})$, $\overset{0}{\Phi} = \overset{0}{\Phi}(\bar{\theta}, \bar{\Phi})$ sont les transformations conformes sur la sphère dont le rayon est l'unité. Les transformations conformes sur la sphère sont représentées par les fonctions analytiques d'une variable complexe

$$(A, 6) \quad Z = f(z) \quad \text{avec} \quad z = \cotg \frac{\overset{0}{\theta}}{2} e^{i\Phi}, \quad Z = \cotg \frac{\overset{0}{\theta}}{2} e^{i\Phi}.$$

Nous savons que les seuls automorphismes sur la sphère sont les homographies

$$(A, 7) \quad f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

où a, b, c, d sont des paramètres complexes que l'on peut supposer tels que $ad - bc = \pm 1$,

En différenciant (A-6) nous obtenons $\overset{0}{\theta}_2$ et $\overset{0}{\Phi}_2$ en fonction de f^* conjugué de f et f' . dérivée de f par rapport à z . Nous en déduisons :

$$(A, 8) \quad \frac{\overset{0}{r}}{\overset{0}{r}} = \frac{\sin^2 \frac{\overset{0}{\theta}}{2} (ff^* + 1)}{\sqrt{ff^*}}$$

Finalement en tenant compte de (A-7) dans (A-8) nous obtenons la forme de $\overset{0}{r}$

$$(A-9) \quad \overset{0}{r} = A \cos \bar{\theta} + B \sin \bar{\theta} \cos \Phi + C \sin \bar{\theta} \sin \Phi + D,$$

où A, B, C, D sont quatre constantes réelles.

Nous vérifions de suite que C_0 et D_0 sont identiquement nuls si nous tenons compte de (A-9) dans (A-5).

(A-4) s'écrit donc

$$\begin{aligned} A\gamma_0^1 + B\delta_0^1 &= \gamma_0^1 \\ -\varepsilon B\gamma_0^1 + \varepsilon A\delta_0^1 &= \delta_0^1 \end{aligned}$$

Le déterminant $\begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix}$ est nul si et seulement si $A = B = 0$ c'est-à-dire si $\theta_2^0 = \Phi_2^0 \sin \theta = 0$ ce qui est impossible d'après (5-3). On en déduit que $\gamma_0^1 = \delta_0^1 = 0$ est conservé dans un changement de coordonnées (T). Cette invariance entraîne le lemme du paragraphe 3.

REMERCIEMENTS

J'exprime mes vifs remerciements à M. A. Papapetrou, Directeur de Recherches, qui m'a proposé ce travail et qui m'a sans cesse guidée dans sa réalisation.

RÉFÉRENCES

- [1] I. MORET-BAILLY et A. PAPAPETROU, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. VI, n° 3, 1967, p. 205.
- [2] H. BONDI, M. VAN DER BURG et A. METZNER, *Proc. Roy. Soc.*, t. A **269**, 1962, p. 21.
- [3] R. SACHS, *Proc. Roy. Soc.*, t. A **270**, 1962, p. 103.
- [4] E. NEWMAN et R. PENROSE, *J. Math. Phys.*, t. **3**, 1962, p. 566.
- [5] M. G. J. VAN DER BURG, *Proc. Roy. Soc.*, t. A **269**, p. 112.
- [6] A. LICHNEROWICZ, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson, Paris, 1955, p. 126.
- [7] A. PAPAPETROU, *J. Math. Phys.*, vol. 6, n° 9, 1965, p. 1405.

Manuscrit reçu le 19 juillet 1968.

Structure du champ gravitationnel « non-radiatif » dans le formalisme de Newman-Penrose en relativité générale

par

I. MORET-BAILLY

(Laboratoire de Physique Théorique associé au C. N. R. S.
Institut Henri Poincaré, Paris).

RÉSUMÉ. — Dans ce travail nous étudions la structure du champ gravitationnel non-radiatif dans le formalisme de Newman-Penrose. Les fonctions du champ étant supposées développables en série formelle de puissances de $\frac{1}{r}$ nous démontrons que les coefficients de ces puissances sont des polynômes de la variable temps retardée.

Des résultats analogues ont déjà été obtenus par Papapetrou pour le champ électromagnétique non radiatif en relativité restreinte et par Papapetrou et l'auteur pour le champ gravitationnel non radiatif considéré par Bondi et Sachs.

SUMMARY. — The structure of a non-radiative gravitational field is investigated using the Newman-Penrose formalism. We show that the field variables, supposed to possess an expansion in powers of $\frac{1}{r}$, have as coefficient of $\frac{1}{r^n}$ a polynomial in the retarded time variable.

Similar results were already obtained by Papapetrou in the case of the non-radiative electromagnetic field in Special Relativity, and by Papapetrou and the present author in the case of the non-radiative gravitational field considered by Bondi and Sachs.

I. INTRODUCTION

Dans deux travaux précédents [1] et [2] nous avons étudié la structure du champ gravitationnel « retardé », solution des équations du vide et non radiatif sur un espace-temps asymptotiquement plat. Cette étude a été faite d'abord dans le cas du champ à symétrie axiale étudié par Bondi [3], ensuite dans le cas plus général du champ asymétrique traité par Sachs [4] et Newman-Penrose [5], Newman-Unti [6]. Pour ce dernier cas nous avons utilisé la forme des équations du champ donnée par Sachs.

Dans le présent travail nous reprenons l'étude de ce cas, toujours pour des champs dont les composantes sont développables en série formelle de puissances de $\frac{1}{r}$, mais cette fois dans le formalisme de Newman-Penrose. Les résultats sont identiques à ceux déjà obtenus dans [2]. Ils auraient d'ailleurs pu en être déduits. Il nous a semblé préférable de les établir directement parce que cette forme des équations du champ permet, d'une part, d'en donner une démonstration plus simple et d'autre part de les étendre à d'autres grandeurs caractérisant le champ.

Énumérons brièvement les hypothèses faites dans ce travail. Le champ gravitationnel est une solution « retardée » sur un espace-temps asymptotiquement plat des équations du vide étudiée dans [6] par Newman-Unti. Les coordonnées radiatives $x^0 = u$, $x^1 = r$ sont utilisées, u est le temps retardé, r est un paramètre affine des bicaractéristiques. Cette solution est de plus supposée développable en série de puissances de $\frac{1}{r}$ et non radiative dans le domaine (Ω) défini par $r > r_0 > 0$. Rappelons que, par définition, une telle solution est non radiative si en tout point de ce domaine les composantes du tenseur de courbure par rapport à un champ de repères quasi-orthonormés ont un développement ne contenant pas de terme en $\frac{1}{r}$. Avec la notation utilisée dans [5] une solution est non radiative si et seulement si :

$$(I-1) \quad \psi_4^0 = 0.$$

Dans le chapitre II, nous rappelons le formalisme utilisé par Newman-Penrose dans [5] et précisons les hypothèses faites. Dans le chapitre III nous reprenons l'étude des équations du vide pour l'obtention des solutions satisfaisant les hypothèses précédentes sans que (I-1) soit nécessairement vérifié. Dans le chapitre IV nous étudions la structure de ces solutions pour un champ non radiatif. L'hypothèse (I-1) étant satisfaite, nous démon-

trons que les coefficients des puissances de $\frac{1}{r}$ des fonctions du champ sont des polynômes de la variable u .

II. FORMALISME UTILISÉ PAR NEWMAN-PENROSE

Dans ce chapitre nous rappelons le formalisme utilisé dans [5] en précisant les hypothèses que nous faisons.

1) Définition d'un champ de repères quasi-orthonormés ($\mathcal{R}$).

Soit V_4 une variété riemannienne, de classe C^∞ , munie d'une métrique de signature -2 , rapportée à des coordonnées locales x^α . Le tenseur métrique est supposé de classe au moins C^1 , C^3 par morceaux. Nous supposons l'existence globale d'une famille d'hypersurfaces caractéristiques à un paramètre $u(x^\alpha) = \text{cte}$ dans un ouvert (Ω) complémentaire d'un tube d'univers renfermant les sources. Le champ de vecteurs l_μ défini sur (Ω) par

$$(II-1) \quad l_\mu = \frac{\partial u}{\partial x^\mu},$$

étant intégrable, satisfait :

$$(II-2) \quad \nabla_\mu l_\nu - \nabla_\nu l_\mu = 0$$

ce qui entraîne

$$(II-3) \quad l^\mu \nabla_\mu l_\nu = 0.$$

La congruence des trajectoires de l_μ est donc géodésique ; étant isotrope, elle engendre les hypersurfaces $u = \text{cte}$. Ces trajectoires sont appelées rayons. Désignons par r un paramètre affine pour chacun des rayons. Il est supposé, en outre, que r peut tendre vers l'infini sur chaque rayon. Précisons les hypothèses faites sur la topologie de V_4 . Désignons par E_3 le complémentaire d'une boule fermée ε_3 de $\mathbb{R}^3$ muni de sa topologie usuelle. Nous supposons que V_4 possède un ouvert (Ω) qui est difféomorphe au produit $\mathbb{R} \times E_3$, chaque hypersurface $u = {}_1u$ de (Ω) s'appliquant sur ${}_1u \times E_3$. Nous supposons en outre que les rayons de chaque hypersurface $u = {}_1u$ ont pour homologues la restriction à ${}_1u \times E_3$ des droites rayons de la boule ${}_1u \times \varepsilon_3$.

En tout point $x \in \Omega$ on considère une base de l'espace tangent T_x : l_μ , n_μ , a_μ , b_μ satisfaisant :

$$(II-4) \quad l^\mu l_\mu = n^\mu n_\mu = a_\mu l^\mu = b_\mu l^\mu = a_\mu n^\mu = b_\mu n^\mu = a_\mu b^\mu = 0$$

$$(II-5) \quad l^\mu n_\mu = 1, \quad a_\mu a^\mu = b_\mu b^\mu = -1,$$

où l_μ est le vecteur défini par (II-1). A cette base on fait correspondre de façon biunivoque une autre base ($\mathcal{R}$) dont les vecteurs $l_\mu, n_\mu, m_\mu, \bar{m}_\mu$ appartiennent à T_x^c , complexifié de T_x , m^μ et $\bar{m}^\mu$ étant définis par

$$(II-6) \quad m_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_\mu - ib_\mu), \quad \bar{m}_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_\mu + ib_\mu).$$

On étend à T_x^c le produit scalaire défini sur T_x . L'espace tangent $T_x \subset T_x^c$ admet pour base ($\mathcal{R}$) qui d'après (II-4, 5, 6) satisfait :

$$(II-7) \quad l^\mu n_\mu = -m^\mu \bar{m}_\mu = 1,$$

$$(II-8) \quad l^\mu l_\mu = n^\mu n_\mu = m^\mu m_\mu = l^\mu m_\mu = n^\mu m_\mu = 0.$$

On donne à cette base ($\mathcal{R}$) le nom de repère quasi-orthonormé. Les composantes du tenseur métrique en coordonnées locales s'écrivent :

$$(II-9) \quad g_{\mu\nu} = l_\mu n_\nu + l_\nu n_\mu - m_\mu \bar{m}_\nu - m_\nu \bar{m}_\mu.$$

2) Les fonctions du champ.

Dans [5] Newman et Penrose obtiennent des équations du champ du cas extérieur qui remplacent les équations d'Einstein du vide. Les fonctions inconnues qui y sont utilisées sont les coefficients de spin, les composantes par rapport à ($\mathcal{R}$) du tenseur de courbure et les composantes en coordonnées locales des vecteurs du repère ($\mathcal{R}$). Les coefficients de spin sont les 12 scalaires complexes suivants et leur conjugué, définis en fonction des coefficients de rotation de Ricci relatifs au repère ($\mathcal{R}$) :

$$(II-10) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \chi = m^\mu l^\nu \nabla_\nu l_\mu & \sigma = m^\mu m^\nu \nabla_\nu l_\mu \\ \pi = -\bar{m}^\mu l^\nu \nabla_\nu n_\mu & \mu = -\bar{m}^\mu m^\nu \nabla_\nu n_\mu \\ \rho = m^\mu \bar{m}^\nu \nabla_\nu l_\mu & \nu = -\bar{m}^\mu n^\nu \nabla_\nu n_\mu \\ \lambda = -\bar{m}^\mu \bar{m}^\nu \nabla_\nu n_\mu & \tau = m^\mu n^\nu \nabla_\nu l_\mu \\ \alpha = \frac{1}{2} (n^\mu \bar{m}^\nu \nabla_\nu l_\mu - \bar{m}^\mu \bar{m}^\nu \nabla_\nu m_\mu) \\ \beta = \frac{1}{2} (n^\mu m^\nu \nabla_\nu l_\mu - \bar{m}^\mu m^\nu \nabla_\nu m_\mu) \\ \gamma = \frac{1}{2} (n^\mu n^\nu \nabla_\nu l_\mu - \bar{m}^\mu n^\nu \nabla_\nu m_\mu) \\ \varepsilon = \frac{1}{2} (n^\mu l^\nu \nabla_\nu l_\mu - \bar{m}^\mu l^\nu \nabla_\nu m_\mu). \end{array} \right.$$

Les 10 composantes indépendantes du tenseur de Weyl par rapport à ($\mathcal{R}$) sont les 5 scalaires complexes ψ_A ($A = 0, 1, 2, 3, 4$) et leur conjugué défini

à partir des composantes en coordonnées locales $C_{\mu\nu\rho\sigma}$. Dans tout ce travail, ce tenseur s'identifie au tenseur de courbure, les équations du vide étant satisfaites.

$$(II-11) \quad \begin{aligned} \psi_0 &= -R_{\mu\nu\rho\sigma} l^\mu m^\nu l^\rho m^\sigma & \psi_3 &= R_{\mu\nu\rho\sigma} l^\mu n^\nu n^\rho \bar{m}^\sigma \\ \psi_1 &= -R_{\mu\nu\rho\sigma} l^\mu n^\nu l^\rho m^\sigma & \psi_4 &= -R_{\mu\nu\rho\sigma} n^\mu \bar{m}^\nu n^\rho \bar{m}^\sigma \\ \psi_2 &= -\frac{1}{2} R_{\mu\nu\rho\sigma} (l^\mu n^\nu l^\rho n^\sigma + l^\mu n^\nu m^\rho \bar{m}^\sigma). \end{aligned}$$

Les autres fonctions inconnues qui entrent dans les équations du champ sont les composantes, en coordonnées locales, des vecteurs du repère ($\mathcal{R}$) qui vérifient (II-1, 7, 8). Le nombre de ces inconnues est réduit par le choix de coordonnées locales adaptées à la congruence l_μ . Le scalaire u est la coordonnée x^0 , on a alors :

$$(II-12) \quad l_\mu = \delta_\mu^0.$$

Les rayons sont les courbes coordonnées de la variable x^1 qui est un paramètre affine r pour chacun des rayons : $x^1 \equiv r$,

$$(II-13) \quad l^\mu = \frac{dx^\mu}{dr} = g^{\mu\nu} \frac{\partial u}{\partial x^\nu} = g^{\mu 0} = \delta_1^\mu.$$

Les deux autres coordonnées qui sont constantes pour les points d'un même rayon sont notées x^i . Dans ce travail tout indice latin désigne 2, 3. Ce choix de coordonnées locales adaptées x^α est systématiquement fait dans la suite. Les composantes n^μ , m^μ non encore déterminées, des vecteurs du repère ($\mathcal{R}$) s'écrivent, compte tenu de (II-7, 8) :

$$(II-14) \quad n^\mu = \delta_0^\mu + U \delta_1^\mu + X^k \delta_k^\mu,$$

$$(II-15) \quad m^\mu = \omega \delta_1^\mu + \zeta^k \delta_k^\mu,$$

où les fonctions réelles U et X^k et complexes ω et ζ^k sont des fonctions des coordonnées. Ce sont ces fonctions inconnues déterminant le repère ($\mathcal{R}$) qui entrent dans les équations du champ. Elles déterminent $g^{\mu\nu}$ en tenant compte de (II-9, 14, 15)

$$(II-16) \quad \begin{aligned} g^{11} &= 2(U - \omega \bar{\omega}) \\ g^{1i} &= X^i - (\zeta^i \bar{\omega} + \bar{\zeta}^i \omega) \\ g^{kl} &= -(\zeta^k \bar{\zeta}^l + \bar{\zeta}^k \zeta^l). \end{aligned}$$

Le choix du champ de repères ($\mathcal{R}$) donne des relations entre les coefficients de spin. La relation (II-2) entraîne :

$$(II-17) \quad \bar{\alpha} + \beta = \tau$$

$$(II-18) \quad \rho = \bar{\rho}.$$

Rappelons que les parties réelle et imaginaire de ρ sont respectivement les scalaires dilatation et rotation attachées à la congruence. La relation (II-18) exprime que la rotation est nulle, propriété qui, on le sait, caractérise les congruences géodésiques isotropes intégrables. Rappelons aussi que le module de σ est la distorsion.

De plus, on impose aux repères ($\mathcal{R}$), définis aux points d'un même rayon, de se déduire les uns des autres par transport parallèle le long de ce rayon, on a donc :

$$(II-19) \quad l^\mu \nabla_\mu n_\nu = l^\mu \nabla_\mu m_\nu = l^\mu \nabla_\mu \bar{m}_\nu = 0,$$

et (II-3, 19) entraînent alors :

$$(II-20) \quad \chi = \varepsilon = \pi = 0.$$

3) Les équations ⁽¹⁾ du champ du cas extérieur.

Écrivons les équations du champ (cas extérieur) de Newman-Penrose dans le système de coordonnées locales adaptées que nous avons définies, les hypothèses faites jusqu'ici étant satisfaites. Nous les classons en quatre groupes d'équations : le premier et le deuxième groupe des équations radiales, les équations non radiales et le dernier groupe.

1^{er} groupe des équations radiales. — Dans ces équations n'interviennent que l'opérateur $D \equiv \frac{\partial}{\partial r}$.

$$(II-21) \quad \begin{aligned} a) \quad D\xi^i &= \rho\xi^i + \sigma\bar{\xi}^i \\ b) \quad D\omega &= \rho\omega + \sigma\bar{\omega} - (\bar{\alpha} + \beta) \\ c) \quad DX^i &= (\bar{\alpha} + \beta)\bar{\xi}^i + (\alpha + \bar{\beta})\xi^i \\ d) \quad DU &= (\bar{\alpha} + \beta)\bar{\omega} + (\alpha + \bar{\beta})\omega - (\gamma + \bar{\gamma}) \\ e) \quad D\rho &= \rho^2 + \sigma\bar{\sigma} \\ f) \quad D\sigma &= 2\rho\sigma + \psi_0 \\ g) \quad D\tau &= \tau\rho + \bar{\tau}\sigma + \psi_1 \\ h) \quad D\alpha &= \alpha\rho + \beta\bar{\sigma} \\ i) \quad D\beta &= \beta\rho + \alpha\sigma + \psi_1 \\ j) \quad D\gamma &= \tau\alpha + \bar{\tau}\beta + \psi_2 \\ k) \quad D\lambda &= \lambda\rho + \mu\bar{\sigma} \\ l) \quad D\mu &= \mu\rho + \lambda\sigma + \psi_2 \\ m) \quad D\nu &= \tau\lambda + \bar{\tau}\mu + \psi_3. \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Dans [6] ces équations sont notées (9-a $\rightarrow$ q), (10-a $\rightarrow$ m) et (11-a $\rightarrow$ d).

2° *groupe des équations radiales.* — Dans ces équations interviennent les opérateurs D et $\delta \equiv \omega \frac{\partial}{\partial r} + \xi^k \frac{\partial}{\partial x^k}$.

$$(II-22) \quad D\psi_{A''} + (A'' - 5)\rho\psi_{A''} \\ = \bar{\delta}\psi_{A''-1} - 2(3 - A'')\alpha\psi_{A''-1} + (1 - A'')\lambda\psi_{A''-2},$$

où $A'' = 1, 2, 3, 4$.

Ces quatre équations sont linéaires et homogènes par rapport aux ψ_A .

Les équations non radiales. — Elles font intervenir les opérateurs δ et $\Delta \equiv U \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial u} + X^k \frac{\partial}{\partial x^k}$.

$$(II-23) \quad \begin{aligned} a) \quad & \delta X^i - \Delta \xi^i = (\mu + \bar{\gamma} - \gamma)\xi^i + \bar{\lambda}\bar{\xi}^i \\ b) \quad & \delta \bar{\xi}^i - \bar{\delta}\xi^i = (\bar{\beta} - \alpha)\xi^i + (\bar{\alpha} - \beta)\bar{\xi}^i \\ c) \quad & \delta \bar{\omega} - \bar{\delta}\omega = (\bar{\beta} - \alpha)\omega + (\bar{\alpha} - \beta)\bar{\omega} + (\mu - \bar{\mu}) \\ d) \quad & \delta U - \Delta \omega = (\mu + \bar{\gamma} - \gamma)\omega + \bar{\lambda}\bar{\omega} - \bar{v} \\ e) \quad & \Delta \lambda - \bar{\delta}v = 2\alpha v + (\bar{\gamma} - 3\gamma - \mu - \bar{\mu})\lambda - \psi_4 \\ f) \quad & \delta \rho - \bar{\delta}\sigma = (\beta + \bar{\alpha})\rho + (\bar{\beta} - 3\alpha)\sigma - \psi_1 \\ g) \quad & \delta \alpha - \bar{\delta}\beta = \mu\rho - \lambda\sigma - 2\alpha\beta + \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} - \psi_2 \\ h) \quad & \delta \lambda - \bar{\delta}\mu = (\alpha + \bar{\beta})\mu + (\bar{\alpha} - 3\beta)\lambda - \psi_3 \\ i) \quad & \delta v - \Delta \mu = \gamma\mu - 2v\beta + \bar{\gamma}\mu + \mu^2 + \lambda\bar{\lambda} \\ j) \quad & \delta \gamma - \Delta \beta = \tau\mu - \sigma v(\mu - \gamma + \bar{\gamma})\beta + \bar{\lambda}\alpha \\ k) \quad & \delta \tau - \Delta \sigma = 2\tau\beta + (\bar{\gamma} + \mu - 3\gamma)\sigma + \bar{\lambda}\rho \\ l) \quad & \Delta \rho - \bar{\delta}\tau = (\gamma + \bar{\gamma} - \bar{\mu})\rho - 2\alpha\tau - \lambda\sigma - \psi_2 \\ m) \quad & \Delta \alpha - \bar{\delta}\gamma = \rho v - \tau\lambda - \lambda\beta + (\bar{\gamma} - \gamma - \bar{\mu})\alpha - \psi_3. \end{aligned}$$

Le dernier groupe d'équations dans lesquelles les opérateurs δ et Δ agissent sur les ψ_A .

$$(II-24) \quad \Delta\psi_{A''-1} - \delta\psi_{A''} = (A'' - 1)v\psi_{A''-2} - 2(A'' - 3)\gamma\psi_{A''-1} + (A'' - 5)\tau\psi_{A''} \\ - A''\mu\psi_{A''-1} + 2(A'' - 2)\beta\psi_{A''} - (A'' - 4)6\psi_{A''+1},$$

avec $A'' = 1, 2, 3, 4$.

Ces équations imposent à ψ_4 d'être au moins de classe C^0 et aux autres fonctions du champ d'être au moins de classe C^1 . D'autre part, la forme des équations (II-22) montre que toute solution est nécessairement indéfiniment dérivable par rapport aux variables x^2, x^3 .

4) Définition des solutions étudiées.

Dans les chapitres suivants nous ne nous intéressons qu'aux solutions qui sont « retardées » sur un espace-temps asymptotiquement plat et développables en série formelle de puissances de $\frac{1}{r}$. Ce sont les solutions

des équations du vide (II-21 $\rightarrow$ 24) qui satisfont les hypothèses suivantes :

a) Sur (Ω) les coefficients de spin (II-10), liés par les relations (II-17, 18, 20), les ψ_A , donnés par (II-11) et les fonctions déterminant le repère $(\mathcal{R})$ sont développables en série formelle de puissances de $\frac{1}{r}$. Toutes ces séries sont supposées dérivables terme à terme.

b) Les fonctions ψ_0 , ρ , ξ^k satisfont les conditions aux limites suivantes :

$$(II-25) \quad \lim_{r=\infty} (r^5 \psi_0) = \psi_0^0,$$

où ψ_0^0 est une fonction des variables u , x^i ,

$$(II-26) \quad \lim_{r=\infty} (r\rho) = -1,$$

$$(II-27) \quad \lim_{r=\infty} (r\xi^2) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \lim_{r=\infty} (r\xi^3) = \frac{i}{\sqrt{2} \sin x^2}$$

Les hypothèses a) et b) sont suffisantes pour que la métrique de V_4 ait pour limite, quand r tend vers l'infini, celle de la métrique de l'espace de Minkowski rapporté aux coordonnées radiatives $(^1) u$, r , $x^2 \equiv \theta$, $x^3 \equiv \varphi$, à savoir :

$$\begin{aligned} \lim_{r=\infty} \left(\frac{g_{22}}{r^2} \right) &= -1, & \lim_{r=\infty} \left(\frac{g_{33}}{r^2} \right) &= -\sin^2 \theta, & \lim_{r=\infty} \left(\frac{g_{23}}{r^2} \right) &= 0, \\ \lim_{r=\infty} (g_{01}) &= 1, & \lim_{r=\infty} (g_{00}) &= 1, & \lim_{r=\infty} \left(\frac{g_{0i}}{r} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Les coordonnées x^2 et x^3 sont alors les coordonnées polaires θ , φ définies sur la sphère à deux dimensions S_2 . L'ouvert (Ω) est ainsi défini par $\frac{1}{2} < u < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < r$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Dans [7] il est démontré que les solutions des équations du champ satisfaisant les hypothèses (a) et (b) ont nécessairement le comportement $(^2)$ asymptotique suivant :

$$(II-29) \quad \begin{aligned} \tau, X^k &= O\left(\frac{1}{r^3}\right); & \gamma, \sigma &= O\left(\frac{1}{r^2}\right); & \alpha, \beta, \lambda, \mu, \nu, \omega &= O\left(\frac{1}{r}\right); \\ U &= O(1); & \psi_{A''} &= O\left(\frac{1}{r^{5-A''}}\right) \text{ avec } A'' = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

(¹) Voir [5].

(²) Le symbole $O\left(\frac{1}{r^n}\right)$ désigne une fonction telle que

$$\left| O\left(\frac{1}{r^n}\right) \right| < \frac{1}{r^n} f(u, \theta, \varphi)$$

pour tout r suffisamment grand, $f(u, \theta, \varphi)$ étant une fonction indépendante de r .

Écrivons les développements en $\frac{1}{r}$ de ces solutions en tenant compte de (II-25, 26, 27, 29). Nous sommes obligés de modifier les notations utilisées dans [5] pour pouvoir formuler sous une forme condensée les résultats que nous obtiendrons.

Si F désigne l'une des fonctions suivantes $\rho, \sigma, \alpha, \beta, \lambda, \mu, \tau, \nu, \gamma, \xi^k, X^k$,

$$F = \frac{1}{r} \left[{}^0F + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{{}^nF}{r^n} \right],$$

avec :

$$(II-31) \quad {}^0\sigma = {}^0\gamma = {}^0X^k = {}^1X^k = \tau = 0, \quad {}^0\xi^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad {}^0\xi^3 = \frac{i}{\sqrt{2} \sin \theta}, \quad {}^0\rho = -1.$$

$$(II-32) \quad \left\{ \begin{array}{l} U = {}^0U + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{{}^nU}{r^n}, \\ \omega = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{{}^n\omega}{r^n}. \end{array} \right.$$

$$(II-33) \quad \psi_A = \frac{1}{r^2} \sum_{n=3-A}^{\infty} \frac{{}^n\psi_A}{r^n}, \quad \text{avec : } A = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Dans (II-33), remarquons que l'indice n ne prend pas que les valeurs entières positives prises dans les formules précédentes mais prend aussi la valeur 0 pour $A = 3$ et $A = 4$ et même la valeur -1 pour $A = 4$.

III. ÉTUDE DES ÉQUATIONS DU CHAMP

1) Résolution du premier groupe des équations radiales (II-21).

Nous introduisons (II-30, 31, 32) dans ces équations. Nous allons démontrer que l'identification des coefficients des puissances successives de $\frac{1}{r}$ donne le résultat suivant pour U, ω et l'une quelconque des fonctions F :

a) Les seuls coefficients du développement de ces fonctions qui ne sont pas déterminés par ces équations sont : $\overset{1}{\rho}, \overset{1}{\sigma}, \overset{0}{\alpha}, \overset{0}{\beta}, \overset{0}{\lambda}, \overset{0}{\mu}, \overset{0}{U}, \overset{1}{\omega}$.

b) Les coefficients $\overset{n}{U}, \overset{n}{\omega}, \overset{n}{F}$ (n entier positif) sont chacun une somme

de produits dont les facteurs ne sont que $\overset{1}{\rho}, \overset{1}{\sigma}, \overset{0}{\alpha}, \overset{0}{\beta}, \overset{0}{\lambda}, \overset{0}{\mu}, \overset{0}{U}, \overset{1}{\omega}, \overset{i}{\psi_A}$ ($A' = 0, 1, 2, 3$), leur conjugué et un coefficient numérique. Chaque produit a de plus la propriété suivante : la somme des indices ($\overset{0}{0}$ de $\overset{0}{\alpha}, \overset{0}{\beta}, \overset{0}{\lambda}, \overset{0}{\mu}, \overset{0}{U}$, $\overset{1}{1}$ de $\overset{1}{\rho}, \overset{1}{\sigma}, \overset{1}{\omega}, \overset{i}{i}$ de $\overset{i}{\psi_A}$) de chaque facteur qui y figure est égale à n . Remarquons que si $b)$ est vraie pour $U, \omega, F, b)$ est vraie pour $\bar{U}, \bar{\omega}, \bar{F}$.

Démontrons (a) et (b) d'abord pour ρ et σ . Les équations (II-21, e, f) donnent :

$$\begin{cases} 1 - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \frac{\rho^n}{r^n} = \left(-1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{r^n} \right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^n}{r^n} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^n}{r^n} \\ \sum_{n=1}^{\infty} - (n+1) \frac{\sigma^n}{r^n} = 2 \left(-1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{r^n} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^n}{r^n} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\psi_0^n}{r^n} \end{cases}$$

Ce système peut encore s'écrire :

$$(III-1) \quad \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} (1-n) \frac{\rho^n}{r^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{r^n} \sum_{p+q=n} \left(\rho^p \bar{\rho}^q + \sigma^p \bar{\sigma}^q \right) \right] \\ \sum_{n=1}^{\infty} (1-n) \frac{\sigma^n}{r^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{2}{r^n} \sum_{p+q=n} \rho^p \sigma^q \right] + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\psi_0^n}{r^n} \end{cases}$$

avec p, q entiers positifs.

Seuls $\overset{1}{\rho}$ et $\overset{1}{\sigma}$ ne sont pas déterminés par (III-1). Mais, seul $\overset{1}{\sigma}$ n'est pas effectivement déterminé, car $\overset{1}{\rho}$ peut être annulé par un changement de coordonnée ⁽¹⁾. Nous supposons dans la suite :

$$(III-2) \quad \overset{1}{\rho} = 0.$$

Démontrons maintenant (b) pour $\overset{n}{\rho}, \overset{n}{\sigma}$ ($n > 1$). Raisonnons par récurrence. Supposons que (b) soit vérifiée pour les $\overset{i}{\rho}, \overset{i}{\sigma}$ avec $i = 2, \dots, n-1$, il est immédiat d'après (III-1) que (b) est vraie pour $i = n$. Il ne nous reste plus qu'à vérifier (b) pour $n = 2$, par exemple. Pour $n = 2$, (III-1) donne

$$(III-3) \quad \begin{cases} \overset{2}{\rho} = -\overset{1}{\sigma} \overset{1}{\sigma} \\ \overset{2}{\sigma} = 0. \end{cases}$$

⁽¹⁾ Voir [6].

Faisons la démonstration pour α et β en utilisant le système (21-h, i) qui s'écrit après y avoir introduit les développements (II-30, 31, 33):

$$(III-4) \quad \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} -n \frac{\alpha}{r^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{{}^0\alpha\rho + {}^0\beta\sigma}{r^n} + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{r^n} \sum_{p+q=n} ({}^p\rho\alpha + {}^p\sigma\beta) \right] \\ \sum_{n=1}^{\infty} -n \frac{\beta}{r^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{{}^0\beta\rho + {}^0\alpha\sigma}{r^n} + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{r^n} \sum_{p+q=n} ({}^p\sigma\alpha + {}^p\rho\beta) + \frac{{}^n\psi_1}{r^n} \right]. \end{cases}$$

La proposition (a) est vérifiée pour α et β puisque α et β ne sont pas déterminés par ce système. Démontrons (b). Pour $n=1$ on a, compte tenu de (III-2):

$$(III-5) \quad \begin{cases} \alpha = -\beta\bar{\sigma} \\ \beta = -\alpha\sigma. \end{cases}$$

Procédons par récurrence pour $n > 1$. Dans (III-4) nous utilisons la proposition (b) appliquée à ρ et σ , α , β donnés par (III-5), la proposition (b) supposée vraie pour les α , β avec $i = 2, 3, \dots, n-1$. Le système (III-4) nous donne alors immédiatement (b) pour α et β . Il ne nous reste plus qu'à vérifier que (b) est vraie par exemple pour $n=2$. On a, en tenant compte de (III-2, 3, 5),

$$(III-6) \quad \begin{cases} \alpha = \alpha\sigma\bar{\sigma} \\ \beta = \beta\sigma\bar{\sigma} - \frac{1}{2}\psi_1. \end{cases}$$

Les propositions (a) et (b) sont de suite démontrées pour τ en utilisant (II-17). Démontrons-les pour les autres fonctions F et U, ω . Nous introduisons les développements (II-30, 31, 32, 33) dans (II-21, a, b, c, d, j, k, l, m). Nous obtenons respectivement:

$$(III-7) \quad \begin{aligned} a) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} -n \frac{\zeta}{r^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left({}^0\zeta^k \frac{\rho}{r^n} + {}^0\bar{\zeta}^k \frac{\sigma}{r^n} \right) + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{r^n} \sum_{p+q=n} ({}^p\rho\zeta^k + {}^p\sigma\bar{\zeta}^k) \right], \\ b) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} (1-n) \frac{\omega}{r^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{r^n} \sum_{p+q=n} ({}^p\rho\omega + {}^p\sigma\bar{\omega}) - \frac{{}^n\tau}{r^n} \right] \\ c) \quad & \sum_{n=2}^{\infty} -(n+1) \frac{X^k}{r^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \left({}^0\bar{\zeta}^k \frac{\tau}{r^n} + {}^0\zeta^k \frac{\bar{\tau}}{r^n} \right) + \sum_{n=3}^{\infty} \left[\frac{1}{r^n} \sum_{p+q=n} ({}^p\rho\bar{\zeta}^k + {}^p\sigma\zeta^k) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 j) \quad \sum_{n=1}^{\infty} - (n+1) \frac{\gamma}{r^n} &= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\alpha \frac{{}^0\tau}{r^n} + \beta \frac{{}^0\bar{\tau}}{r^n} \right) \\
 &\quad + \sum_{n=3}^{\infty} \left[\frac{1}{r^n} \sum_{p+q=n} ({}^p\tau\alpha + {}^p\bar{\tau}\beta) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_2}{r^n}, \\
 d) \quad \sum_{n=1}^{\infty} - n \frac{U}{r^n} &= \sum_{n=3}^{\infty} \left[\frac{1}{r^n} \sum_{p+q=n} ({}^p\tau\omega + {}^p\bar{\tau}\omega) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma + \bar{\gamma}}{r^n}, \\
 k) \quad \sum_{n=1}^{\infty} - n \frac{\lambda}{r^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda \frac{{}^0\rho}{r^n} + \mu \frac{{}^0\sigma}{r^n} \right) + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{r^n} \sum_{p+q=n} ({}^p\rho\lambda + {}^p\bar{\rho}\bar{\mu}) \right], \\
 l) \quad \sum_{n=1}^{\infty} - n \frac{\mu}{r^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu \frac{{}^0\rho}{r^n} + \lambda \frac{{}^0\sigma}{r^n} \right) + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{r^n} \sum_{p+q=n} ({}^p\mu\rho + {}^p\bar{\mu}\bar{\sigma}) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_2}{r^n}, \\
 m) \quad -v - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \frac{v}{r^n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_3}{r^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda \frac{{}^0\tau}{r^n} + \mu \frac{{}^0\bar{\tau}}{r^n} \right) \\
 &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{r^n} \sum_{p+q=n} ({}^p\tau\lambda + {}^p\bar{\tau}\mu) \right].
 \end{aligned}$$

Les équations (III-7 *b, k, l*) ne déterminent pas ω, λ, μ . L'équation (III-7, *m*) donne :

$$(III-8) \quad v = -\psi_3,$$

c'est la proposition (*b*) pour v . Démontrons-la pour les autres coefficients. Nous opérons comme pour α et β . Nous raisonnons par récurrence pour $n > 1$; nous utilisons la propriété (*b*) appliquée à $\rho, \sigma, \alpha, \beta$, nous la supposons vraie pour les $\xi, \omega, X^k, \gamma, U, \lambda, \mu, v$ avec $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$. Les équations (III-7) donnent de suite (*b*) pour $i = n$. Il suffit de vérifier que (*b*) est vraie pour $i = 1$ et $i = 2$. On obtient en tenant compte de (III-2, 3, 5, 6) de (II-31) et de

$$(III-9) \quad \tau = -\frac{1}{2}\psi_1,$$

donné par (II-21, g) :

$$\begin{aligned}
 \xi^2_1 &= -\frac{\sigma}{\sqrt{2}} & \xi^2_2 &= \frac{\sigma \bar{\sigma}}{\sqrt{2}} \\
 \xi^3_1 &= \frac{i\sigma}{\sqrt{2} \sin \theta} & \xi^3_2 &= \frac{i\sigma \bar{\sigma}}{\sqrt{2} \sin \theta} \\
 \gamma &= -\frac{1}{2} \psi_2 & \omega &= -\sigma \bar{\omega} - \frac{1}{2} \psi_1 \\
 \text{(III-10)} \quad U &= -\frac{1}{2} (\psi_2 + \bar{\psi}_2) & \gamma &= \frac{1}{3} [\psi_1 \alpha + \bar{\psi}_1 \beta] - \frac{1}{3} \psi_2 \\
 \lambda &= -\mu \bar{\sigma} & U &= \frac{1}{6} [\psi_1 \alpha + \bar{\psi}_1 \beta] - \frac{1}{6} \psi_2 \\
 \mu &= -\lambda \sigma - \psi_2 & \lambda &= \lambda \sigma \bar{\sigma} + \frac{1}{2} \bar{\sigma} \psi_2 \\
 \nu &= -\frac{1}{2} \psi_3 & \mu &= \mu \sigma \bar{\sigma} - \frac{1}{2} \psi_2 \\
 & & \nu &= -\frac{1}{3} \psi_3 + \frac{1}{6} (\psi_1 \lambda + \bar{\psi}_1 \mu).
 \end{aligned}$$

La proposition (b) est donc vérifiée pour $i = 1, i = 2$.

En vue d'une utilisation dans l'étude du prochain groupe d'équations, précisons les ψ_A qui interviennent dans $\rho, \xi^k, \alpha, \omega, \lambda$. L'étude des équations [III-1-4-7 (a, b, k, l)] montre que ces fonctions dépendent toutes de ψ_0 , que α et ω dépendent en outre de ψ_1 et λ de ψ_2 .

2) Résolution du deuxième groupe des équations radiales (II-22).

Nous introduisons (II-30, 31, 32, 33) dans les équations (II-22). Nous obtenons ⁽¹⁾ :

$$\begin{aligned}
 &\sum_{n=3-A''}^{\infty} -(n+2) \frac{\psi_{A''}^n}{r^n} + (A''-5) \left(-1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{r^n} \right) \sum_{n=3-A'}^{\infty} \frac{\psi_{A''}^n}{r^n} \\
 &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\omega}^n}{r^n} \sum_{n=4-A''}^{\infty} (n+2) \frac{\psi_{A''-1}^n}{r^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi_k^n}{r^n} \sum_{n=4-A''}^{\infty} \frac{\partial_k \psi_{A''-1}^n}{r^n} \\
 &- 2(3-A'') \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{r^n} \sum_{n=4-A''}^{\infty} \frac{\psi_{A''-1}^n}{r^n} + (1-A'') \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{r^n} \sum_{n=5-A''}^{\infty} \frac{\psi_{A''-2}^n}{r^n}.
 \end{aligned}$$

⁽¹⁾ $\partial_k \equiv \frac{\partial}{\partial x^k}$.

ou encore $(^2)$

$$\begin{aligned}
 \text{(III-11)} \quad & \sum_{n=3-A''}^{\infty} (3-A''-n) \frac{\psi_{A''}^n}{r^n} \\
 &= \sum_{n=4-A''}^{\infty} \left\{ \frac{1}{r^n} \sum_{p+q=n} [(5-A'')^{p,q} \rho \psi_{A''}^{p,q} + \xi^k \partial_k \psi_{A''-1}^{p,q} - 2(3-A'')^{p,q} \alpha \psi_{A''-1}^{p,q}] \right\} \\
 &+ \sum_{n=5-A''}^{\infty} \left\{ \frac{1}{r^n} \sum_{p+q=n} [-(q+2) \overline{\omega} \psi_{A''-1}^{p,q} + (1-A'')^{p,q} \lambda \psi_{A''-2}^{p,q}] \right\}.
 \end{aligned}$$

Nous allons démontrer que l'identification des coefficients des puissances successives de $\frac{1}{r}$ dans (III-11) donne les propriétés (c) et (d) suivantes pour les ψ_A ($A = 0, 1, 2, 3, 4$).

(c) Les seuls coefficients du développement des ψ_A qui ne sont pas déterminés par les équations (III-11) sont tous les ψ_0^i et les $\psi_{A''}^{3-A''}$ avec $A'' \neq 0$. Les $\psi_{A''}^n$ possèdent la propriété suivante :

Propriété (d) :

Chaque coefficient $\psi_{A''}^n$ est une somme de produits dont les facteurs ne sont que $\sigma, \alpha, \beta, \lambda, \mu, U, \omega, \psi_0$ (quel que soit i), les $\psi_{A''}^{3-A''}$, leur conjugué, les dérivées par rapport à θ et φ de ces facteurs et un coefficient numérique. Chaque produit a de plus la propriété suivante : la somme des indices (zéro de $\alpha, \beta, \lambda, \mu, U$, un de σ, ω, i de ψ_0 et $3-A''$ de $\psi_{A''}^{3-A''}$) de chaque facteur qui y figure est égale à n .

(III-11) rend la proposition (c) évidente. Démontrons la propriété (d). Nous faisons un raisonnement par récurrence portant sur l'indice A'' des $\psi_{A''}^i$. Nous devons donc

$(^2)$ Dans (III-11), le couple (p, q) d'indices figurant dans un monôme est une solution entière du système

$$\begin{cases} p+q=n \\ p \geq p_0, \quad q \geq q_0. \end{cases}$$

La notation $\sum_{p+q=n}$ signifie une sommation dans laquelle le couple (p, q) prend successivement la valeur des solutions entières du système. Précisons la valeur de p_0 et q_0 . Pour $\rho, \overline{\omega}$ on a $p_0 = 1$, pour ξ^k, α, λ on a $p_0 = 0$, pour q dans ψ_A^q ($A = 0, 1, 2, 3, 4$) on a $q_0 = 3-A$.

1° Démontrer le *lemme* suivant : la propriété (d) est vraie pour $\psi_{A''}^i$ quel que soit i , si elle est supposée vraie pour tous les $\psi_{B''}^j$ quel que soit j , avec $B'' < A''$.

2° Vérifier que $\psi_{A''}^i$ possède la propriété (d) pour une valeur de A'' , par exemple $A'' = 1$, quel que soit i .

Démontrons le lemme. Par hypothèse (d) est vraie pour les $\psi_{B''}^j$ avec $B'' < A''$ quel que soit j . L'identification des coefficients de $\frac{1}{r^n}$ des membres de (III-11) pour $n = 4 - A''$ prouve alors que (d) est vraie pour cette valeur de n :

$$(III-12) \quad -\psi_{A''}^{4-A''} = \frac{0}{\xi^k} \partial_k \psi_{A''-1}^{4-A''} - 2(3-A'') \alpha^0 \psi_{A''-1}^{4-A''}.$$

On a tenu compte de (III-2) dans (III-12). Pour $n \geq 5 - A''$, cette identification donne :

$$(III-13) \quad (3-A''-n)\psi_{A''}^n = \sum_{p+q=n} [(5-A'')^p \psi_{A''}^q + \frac{p}{\xi^k} \partial_k \psi_{A''-1}^q - 2(3-A'') \alpha^p \psi_{A''-1}^q - (q+2) \bar{\omega}^p \psi_{A''-1}^q + (1-A'') \lambda^p \psi_{A''-2}^q].$$

L'indice A'' étant fixé, nous raisonnons par récurrence sur l'indice n dans (III-13). Nous devons donc prouver que si, en outre, (d) est vraie pour $\psi_{A''}^i$ avec $i = 4 - A'', 5 - A'', \dots, n-1$, elle est vraie pour $\psi_{A''}^n$. Ensuite nous devons vérifier que (d) est vraie pour $n = 5 - A''$ par exemple. Des $\psi_{B''}^i$ figurent dans les seconds membres de (III-13), soit explicitement, soit, comme nous l'avons déjà vu, dans les α, ω, λ (ψ_1 dans α, ω, ψ_2 dans ω). Mais cet indice B'' est au plus égal à l'indice A'' des premiers membres.

En effet, dans le cas où $A'' = 1$, les ψ_2^i dont dépendent les λ^p n'interviennent pas, le facteur $(1 - A'')$ étant alors nul ; dans le cas où $A'' > 1$ c'est évident.

Montrons que les $\psi_{A''}^i$ des seconds membres ont un indice i inférieur à n .

Ceci est immédiat pour les $\psi_{A''}^q$ qui y figurent explicitement, l'indice p de $\bar{\omega}^p$ étant supérieur à 1. Pour $A'' = 1$ dans (III-13) les ψ_1^i dont dépendent les α^p et $\bar{\omega}^p$ ont un indice i au plus égal à p qui, lui-même, est au plus égal à $n-3$. Enfin pour $A'' = 2$ dans (III-13) les ψ_2^i dont dépendent les λ^p ont un indice i au plus égal à p et ce dernier est aussi au plus égal à $n-3$. Aux seconds membres de (III-13) les fonctions F, U, ω possèdent la propriété (b)

et les $\psi_{B''}^i$ ($B'' < A''$) la propriété (d), quel que soit i ; de même les $\psi_{A''}^j$ avec $j \leq n-1$ possèdent la propriété (d). De (III-13) nous déduisons que les $\psi_{A''}^n$ satisfont alors (d). Vérifions maintenant que les $\psi_{A''}^n$ satisfont (d) pour $n = 5 - A''$. Faisons $n = 5 - A''$ dans (III-13) nous obtenons :

$$\begin{aligned} -2^{5-A''} \psi_{A''}^n &= (5-A'') \rho^{2 \ 3-A''} \psi_{A''}^n + \xi^k \partial_k^{0 \ 5-A''} \psi_{A''-1}^n + \xi^k \partial_k^{1 \ 4-A''} \psi_{A''-1}^n \\ &\quad - 2(3-A)[\alpha \psi_{A''-1}^{0 \ 5-A''} + \alpha \psi_{A''-1}^{1 \ 4-A''}] - (6-A'') \bar{\omega}^{1 \ 4-A''} \psi_{A''-1}^n + (1-A'') \lambda^{0 \ 5-A''} \psi_{A''-2}^n. \end{aligned}$$

Cette vérification est faite en tenant compte des relations (III-3, 5, 10) et de la propriété (d) vérifiée par hypothèse par les $\psi_{B''}^i$, $B'' < A''$. Le lemme est démontré.

Il ne nous reste plus qu'à vérifier la propriété (d) pour les ψ_1^i quel que soit i . Faisons $A'' = 1$ dans (III-11). Les seuls ψ_A^i qui y figurent, explicitement ou non, sont les ψ_1^i et les ψ_0^i . Il n'existe donc pas, dans les seconds membres, de $\psi_{B''}^i$ ($B'' < A''$).

La vérification se fait en reprenant la démonstration du lemme dans le cas où les $\psi_{B''}^i$ n'existent pas.

Remarque. — Si dans les F, U, ω donnés par le 1^{er} groupe des équations radiales on remplace les $\psi_{A''}^i$ ($i \leq n$) par leurs valeurs données par le 2^e groupe des équations radiales, on trouve de suite que les F, U, ω possèdent la propriété (d).

3) Les équations « non-radiales » (II-23).

Nous y introduisons les développements (III-30, 31, 32, 33). Ces équations conduisent à de nouvelles relations entre les coefficients $\sigma, \alpha, \beta, \mu, U, \omega, \lambda, \psi_{A''}$. Elles permettent de déterminer α, β, μ, U et donnent $\omega, \lambda, \psi_4, \psi_3$, la partie imaginaire de ψ_2 en fonction de σ .

L'identification des termes en $\frac{1}{r^2}$ des membres de (23, b), compte tenu de (II-31) et (II-17) détermine α et β ,

$$(III-14) \quad \beta = -\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cotg \theta.$$

De même l'identification des termes en $\frac{1}{r^2}$ des membres de (23, g) compte tenu de (II-31) et (III-14) détermine $\overset{0}{\mu}$,

$$(III-15) \quad \overset{0}{\mu} = -\frac{1}{2}.$$

L'identification des termes en $\frac{1}{r^2}$ des membres de (23, l) et (III-15) donnent

$$(III-16) \quad \overset{0}{U} = -\frac{1}{2}.$$

L'identification des termes en $\frac{1}{r^3}$ des membres de (23, f), compte tenu de (II-31) et (III-14) détermine $\overset{1}{\omega}$:

$$(III-17) \quad \overset{1}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\nabla} + 2 \cotg \theta) \overset{1}{\sigma},$$

avec

$$(III-18) \quad \nabla \equiv \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \bar{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

L'identification des termes en $\frac{1}{r}$ des membres de (23, d), en tenant compte de (III-17) et (III-16) détermine $\overset{0}{v}$:

$$(III-19) \quad \overset{0}{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\nabla} + 2 \cotg \theta) \frac{\partial \overset{1}{\sigma}}{\partial u}$$

et par suite (III-8) détermine $\overset{0}{\psi}_3$.

L'identification des termes en $\frac{1}{r^2}$ des membres de (23, k) donne

$$(III-20) \quad \overset{0}{\lambda} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial u}$$

L'identification des termes en $\frac{1}{r}$ des membres de (23, e) donne, compte tenu de (III-20)

$$(III-21) \quad \overset{-1}{\psi}_4 = -\frac{\partial^2 \overset{1}{\sigma}}{\partial u^2}.$$

L'identification des termes en $\frac{1}{r^2}$ des membres de (23, c) en tenant compte de (III-14, 17) de $\mu = -\lambda^0 \sigma^1 - \psi_2^1$, donné par (III-7), de (III-20) détermine la partie imaginaire de ψ_2^1 soit :

$$(III-22) \quad \psi_2^1 - \psi_2^1 = \frac{1}{2}(\nabla + \cotg \theta)(\nabla + 2 \cotg \theta)\bar{\sigma}^1 - \frac{1}{2}(\bar{\nabla} + \cotg \theta)(\bar{\nabla} + 2 \cotg \theta)\sigma^1 + \sigma^1 \frac{\partial \bar{\sigma}^1}{\partial u} - \bar{\sigma}^1 \frac{\partial \sigma^1}{\partial u}.$$

Rappelons qu'à ce stade les seuls coefficients du développement des inconnues (II-30, 32, 33) qui ne sont pas déterminés sont σ^1 , les ψ_0^i , ψ_1^2 et la partie réelle de ψ_2^1 .

4) Résolution des équations (II-24).

Nous y introduisons les développements (II-30, 31, 32, 33).

Dans les équations obtenues en faisant $A'' = 2$ puis $A'' = 3$ dans (II-24), l'identification des termes en $\frac{1}{r^4}$ dans la première et celle des termes en $\frac{1}{r^3}$ dans la deuxième donne :

$$(III-23) \quad \frac{\partial \psi_2^1}{\partial u} = \xi^k \partial_k \psi_3^0 - 2\beta \psi_3^0 + \sigma^1 \psi_4^{1-1},$$

$$(III-24) \quad \frac{\partial \psi_1^2}{\partial u} = \xi^k \partial_k \psi_2^1 + 2\psi_3^0 \sigma^1.$$

Nous introduisons (II-31), (III-18), (III-8) et (III-19) dans (III-23, 24). Les équations (III-23) et (III-24) s'écrivent :

$$(III-25) \quad \frac{\partial \psi_2^1}{\partial u} = -\frac{1}{2}(\nabla + \cotg \theta)(\nabla + 2 \cotg \theta) \frac{\partial \bar{\sigma}^1}{\partial u} - \sigma^1 \frac{\partial^2 \bar{\sigma}^1}{\partial u^2},$$

$$(III-26) \quad \frac{\partial \psi_1^2}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \nabla \psi_2^1 - \frac{2}{\sqrt{2}} (\nabla + 2 \cotg \theta) \sigma^1 \frac{\partial \bar{\sigma}^1}{\partial u}.$$

ψ_2^1 et ψ_1^2 doivent donc être solution des équations (III-25) et (III-26) (La partie imaginaire de ψ_2^1 donnée par (III-22) satisfait (III-25)).

Faisons maintenant $A'' = 1$ dans (II-24) et démontrons que cette équation donne la dérivée par rapport à la variable u de chaque coefficient ψ_0^i du développement de ψ_0 en fonction de σ^1, ψ_1^2 , de la partie réelle de ψ_2^1 et des ψ_0^j avec $j < i$. Démontrons d'abord que chaque $\partial_u \psi_0^{n+1}$ possède ⁽¹⁾ la propriété (d) comme les $\psi_{A''}^n$. Pour $A'' = 1$ (II-24) s'écrit :

$$\begin{aligned} - \sum_{n=0}^{\infty} \bigcup_{r^n}^n \sum_{n=3}^{\infty} (n+2) \frac{\psi_0^n}{r^n} + r \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\partial_u \psi_0^n}{r^n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{X^k}{r^n} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\partial^k \psi_0^n}{r^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma}{r^n} \sum_{n=2}^{\infty} (n+2) \frac{\psi_1^n}{r^n} \\ - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^k}{r^n} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\partial^k \psi_1^n}{r^n} = \left(4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma}{r^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu}{r^n} \right) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\psi_0^n}{r^n} \\ - \left(4 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\tau}{r^n} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta}{r^n} \right) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\psi_1^n}{r^n} + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma}{r^n} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_2^n}{r^n}. \end{aligned}$$

ou encore ⁽²⁾

$$\begin{aligned} \text{(III-27)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\partial_u \psi_0^{n+1}}{r^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{r^n} \sum_{p+q=n} (3\sigma^p \psi_2^q + \xi^k \partial_k \psi_1^q - 2\beta^p \psi_1^q) \right] \\ + \sum_{n=3}^{\infty} \left[\frac{1}{r^n} \sum_{p+q=n} \{ (q+2) \psi_0^p - (q+2) \psi_1^p - \mu \psi_0^q \} \right] \\ + \sum_{n=4}^{\infty} \left[\frac{1}{r^n} \sum_{p+q=n} (-X^k \partial_k \psi_0^q + 4\gamma \psi_0^q - 4\tau \psi_1^q) \right] \end{aligned}$$

L'identification des coefficients de $\frac{1}{r^2}, \frac{1}{r^3}, \frac{1}{r^n}$ ($n \geq 4$) des membres de (III-27) donne successivement :

$$\text{(III-28)} \quad \partial_u \psi_0^3 = 3\sigma \psi_2^1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \nabla \psi_1^2 - 2\beta \psi_1^0,$$

⁽¹⁾ $\partial_u \equiv \frac{\partial}{\partial u}$.

⁽²⁾ Dans (III-27) l'indice p de $\xi^p, \beta^p, \psi_0^p, \mu$ satisfait $p \geq p_0 = 0$, l'indice p de $\sigma^p, \gamma^p, \psi_1^p, X^p$ satisfait $p \geq p_0 = 1$, l'indice q de ψ_A^q satisfait $p \geq q_0 = 3 - A$.

$$(III-29) \quad \partial_u^4 \psi_0 = 3\sigma^1 \psi_2^2 + 3\sigma^2 \psi_1^2 + \xi^k \partial_k \psi_1^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \nabla \psi_1^3 - 2\beta \psi_1^{03} - 2\beta \psi_1^{12} + 5U \psi_0^{03} - 4\omega \psi_1^{12} - \mu \psi_0^{03},$$

$$(III-30) \quad \partial_u^{n+1} \psi_0 = \sum_{p+q=n} [(3\sigma^p \psi_2^q + \xi^k \partial_k \psi_1^q - 2\beta \psi_1^q) + (q+2)(U \psi_0^{pq} - \omega \psi_1^{pq} - \mu \psi_0^{pq} - X^k \partial_k \psi_0^{pq} + 4(\gamma \psi_0^{pq} - \tau \psi_1^{pq}))].$$

La propriété (d) que possèdent les $\sigma, \xi, U, \omega, \mu, X^k, \gamma, \tau$ entraînent la propriété (d) pour les $\partial_u^{n+1} \psi_0$. Si nous tenons compte maintenant des relations (III-14 $\rightarrow$ 22) nous déduisons que les $\partial_u^i \psi_0$ ($i = 3, 4, 5, \dots$) ne sont fonction que des σ, ψ_1 la partie réelle de ψ_2 et les ψ_0^j avec $j < i$. Nous sommes maintenant en mesure de déterminer, au voisinage de $u = {}_0u$ une solution retardée, sur un espace-temps asymptotiquement plat, et développable en série formelle de puissances de $\frac{1}{r}$. Il suffit de se donner certaines

fonctions sur l'hypersurface caractéristique $u = {}_0u$ et sur le domaine $r = \infty$.

En effet le second membre de (III-25) est connu si l'on se donne σ , fonction de trois variables u, θ, φ de classe c^2 par rapport à ces variables, et indéfiniment dérivable par rapport à θ, φ .

La donnée d'une fonction réelle de deux variables θ et φ de classe C^∞ [$\psi_2^1({}_0u, \theta, \varphi) + \psi_2^1({}_0u, \theta, \varphi)$] permet avec (III-22) de déterminer, après intégration par rapport à u , une solution ψ_2^1 de (III-25). Cette solution, introduite dans (III-26) permet, de même, d'obtenir une solution ψ_1^2 de cette équation en se donnant deux fonctions réelles de deux variables θ, φ de classe C^∞ ou une fonction complexe $\psi_1^2({}_0u, \theta, \varphi)$. La connaissance de σ, ψ_1^1 et ψ_2^1 entraîne alors celle des F^n (définis par (II-30), $\omega^n, U^n, \psi_{\Lambda^n}$, pour $n < 3$, en utilisant (III-17, 19 $\rightarrow$ 22, 6, 10, 12, 13) et entraîne celle du second membre de (III-28). Montrons que la donnée d'une infinité de fonctions de deux variables θ, φ de classe C^∞ : $\psi_0^n({}_0u, \theta, \varphi)$ permet d'achever l'intégration des équations du champ. En effet, $\psi_0^3({}_0u, \theta, \varphi)$ détermine la solution de (III-28) après intégration par rapport à u ; mais alors, les propriétés (d) des F, ω, U et ψ_{Λ^n} montrent que les $F^n, \omega^n, U^n, \psi_{\Lambda^n}$ sont également déterminés pour $n = 3$. La démonstration se termine aisément en montrant

que, si les $\overset{i}{F}$, $\overset{i}{\omega}$, $\overset{i}{U}$, $\overset{i}{\psi}_{A''}$, $\overset{i}{\psi}_0$ sont connus pour $i \leq n$, la donnée de $\overset{n+1}{\psi}_0(0u, \theta, \varphi)$, après intégration par rapport à u de (III-27), détermine $\overset{n+1}{\psi}_0$ et par suite les $\overset{n+1}{F}$, $\overset{n+1}{\omega}$, $\overset{n+1}{U}$, $\overset{n+1}{\psi}_{A''}$.

Les équations du champ non utilisées sont alors identiquement vérifiées.

IV. LE CAS DU CHAMP NON-RADIATIF

Nous supposons maintenant que le champ est non-radiatif. L'hypothèse (I-1) s'écrit dans notre notation :

$$(IV-1) \quad \overset{-1}{\psi}_4 = 0,$$

c'est-à-dire d'après (III-21) :

$$(IV-2) \quad \frac{\partial^2 \overset{1}{\sigma}}{\partial u^2} = 0.$$

ce qui entraîne que les parties réelle et imaginaire de $\overset{1}{\sigma}$ sont des polynômes en u de degré un au plus.

Des équations (III-14 $\rightarrow$ 22), (II-31) et (IV-2) nous déduisons :

$$(IV-3) \quad \frac{\partial \overset{0}{\beta}}{\partial u} = \frac{\partial \overset{0}{\alpha}}{\partial u} = \frac{\partial \overset{0}{\mu}}{\partial u} = \frac{\partial \overset{0}{U}}{\partial u} = \frac{\partial \overset{0}{v}}{\partial u} = \frac{\partial \overset{0}{\psi}_3}{\partial u} = \frac{\partial \overset{0}{\lambda}}{\partial u} = \frac{\partial \overset{0}{\xi}}{\partial u} = 0$$

$$(IV-4) \quad \frac{\partial^2 \overset{1}{\omega}}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 (\overset{1}{\psi}_2 - \overset{1}{\bar{\psi}}_2)}{\partial u^2} = 0.$$

De même les relations (IV-2, III-25, 26) entraînent :

$$(IV-5) \quad \frac{\partial^2 \overset{1}{\psi}_2}{\partial u^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 \overset{2}{\psi}_1}{\partial u^3} = 0.$$

Remarquons que les relations (IV-1 $\rightarrow$ 5) sont encore vérifiées si on remplace les fonctions qui y figurent par leur conjugué ou par leurs dérivées par rapport à θ et φ . De plus toutes ces fonctions sont infiniment dérivables par rapport à u .

Les relations (IV-1 $\rightarrow$ 5) et la propriété (d) que possèdent les $\overset{i}{F}$, $\overset{i}{\omega}$, $\overset{i}{U}$, $\overset{i}{\psi}_{A''}$ entraînent immédiatement, pour $i < 3$:

$$(IV-6) \quad \frac{\partial^{i+1} \overset{i}{F}}{\partial u^{i+1}} = \frac{\partial^{i+1} \overset{i}{U}}{\partial u^{i+1}} = \frac{\partial^{i+1} \overset{i}{\omega}}{\partial u^{i+1}} = \frac{\partial^{i+1} \overset{i}{\psi}_{A''}}{\partial u^{i+1}} = 0.$$

De même, le second membre de (III-27) possédant la propriété (d), on déduit de ce qui précède que la dérivée troisième par rapport à u du second membre de (III-28) est nulle. On a donc :

$$(IV-7) \quad \frac{\partial^4 \psi_0}{\partial u^4} = 0.$$

La propriété (d) et (IV-7) montrent que (IV-6) est vérifié pour $i = 3$. Démonstrons maintenant que (IV-1 $\rightarrow$ 5) entraînent

$$(IV-8) \quad \frac{\partial^{i+1} \psi_0}{\partial u^{i+1}} = 0$$

et (IV-6) pour toutes les valeurs de i . Pour cela il suffit de prouver que si (IV-8) et (IV-6) sont vraies pour $i \leq n$ elles sont vraies pour $i = n + 1$, la vérification de ces relations pour une valeur de i , $i = 3$ étant déjà faite. Prenons la $(n + 1)^{\text{ème}}$ dérivée des membres de (III-30) par rapport à u . Celle du second membre est nulle à cause de la propriété (d) vérifiée par les coefficients qui y figurent et les propriétés (IV-6, 8) qu'ils vérifient également pour $i \leq n$. On en déduit donc :

$$(IV-9) \quad \frac{\partial^{n+2} \psi_0}{\partial u^{n+2}} = 0.$$

La propriété (d), (IV-6, 8) vérifiées pour $i \leq n$, (IV-9) entraînent (IV-6) pour $i = n + 1$. Étudions maintenant les conséquences qu'entraînent les propriétés précédentes sur le tenseur métrique donné par (II-16). Nous introduisons (II-30, 31, 32) dans (II-16), nous obtenons :

$$\begin{aligned} g^{11} &= 2 \left(\overset{0}{U} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overset{n}{U}}{r^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overset{n}{\omega}}{r^n} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overset{n}{\bar{\omega}}}{r^n} \right) \\ g^{1i} &= \frac{1}{r} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overset{n}{X^i}}{r^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overset{n}{\bar{\omega}}}{r^n} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{n}{\xi^i}}{r^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overset{n}{\omega}}{r^n} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{n}{\bar{\xi}^i}}{r^n} \right) \\ g^{kl} &= -\frac{1}{r^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{n}{\xi^k}}{r^n} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{n}{\bar{\xi}^l}}{r^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{n}{\xi^k}}{r^n} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{n}{\bar{\xi}^l}}{r^n} \right), \end{aligned}$$

$$(IV-10) \quad \left\{ \begin{array}{l} g^{11} = 2 \left[\overset{0}{U} + \frac{\overset{1}{U}}{r} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{r^n} \left(\overset{n}{U} + \sum_{p+q=n} \overset{p}{\omega} \overset{q}{\bar{\omega}} \right) \right] \quad \text{avec } p \geq 1, \quad q \geq 1, \\ g^{1i} = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n} \left[\overset{n}{X^i} + \sum_{p+q=n} \left(\overset{p}{\bar{\omega}} \overset{q}{\xi^i} - \overset{p}{\omega} \overset{q}{\bar{\xi}^i} \right) \right] \quad \text{avec } p \geq 1, \quad q \geq 0, \\ g^{kl} = -\frac{1}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^n} \sum_{p+q=n} \left(\overset{p}{\xi^k} \overset{q}{\bar{\xi}^l} + \overset{p}{\bar{\xi}^k} \overset{q}{\xi^l} \right) \quad \text{avec } p \geq 0, \quad q \geq 0. \end{array} \right.$$

Écrivons (IV-10) sous la forme suivante :

$$(IV-11) \quad \left\{ \begin{array}{l} g^{11} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{n}{g}^{11}}{r^n} \quad \text{avec } \overset{0}{g}^{11} \equiv 2\overset{0}{U}, \overset{1}{g}^{11} \equiv \overset{1}{U}, \overset{n}{g}^{11} \equiv \overset{n}{U} + \sum_{p+q=n} \overset{p}{\omega} \overset{q}{\bar{\omega}} \\ \hspace{15em} \text{pour } n \geq 2, \\ g^{1i} = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overset{n}{g}^{1i}}{r^n} \quad \text{avec } \overset{n}{g}^{1i} \equiv \overset{n}{X^i} + \sum_{p+q=n} \left(\overset{p}{\bar{\omega}} \overset{q}{\xi^i} - \overset{p}{\omega} \overset{q}{\bar{\xi}^i} \right), \\ g^{kl} = \frac{1}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{n}{g}^{kl}}{r^n} \quad \text{avec } \overset{n}{g}^{kl} \equiv \overset{p}{\xi^k} \overset{q}{\bar{\xi}^l} - \overset{p}{\bar{\xi}^k} \overset{q}{\xi^l}. \end{array} \right.$$

D'après ce qui précède les $\overset{n}{g}^{\alpha\beta}$ sont infiniment dérivables par rapport à u .

Appliquons $\frac{\partial^{n+1}}{\partial u^{n+1}}$ aux $\overset{n}{g}^{\alpha\beta}$ définis par (IV-11) et par :

$$(IV-12) \quad \left\{ \begin{array}{l} g^{00} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{n}{g}^{00}}{r^n} \\ g^{01} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{n}{g}^{01}}{r^n} \quad \text{avec } \overset{0}{g}^{0\mu} = \delta_1^\mu \quad \text{et } \overset{n}{g}^{0\mu} = 0 \quad \text{pour } n \geq 1, \\ g^{0i} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{n}{g}^{0i}}{r^n} \end{array} \right.$$

d'après (II-13).

Nous obtenons, en utilisant (IV-6, 8) pour i quelconque

$$(IV-13) \quad \frac{\partial^{n+1} \overset{n}{g}^{\alpha\beta}}{\partial u^{n+1}} = 0, \quad \text{quel que soit } n.$$

En conclusion nous avons obtenu les résultats suivants pour le cas du champ non radiatif.

Si les coefficients de spin, les fonctions définissant le repère ($\mathcal{R}$) et les composantes ψ_A du tenseur de Weyl ont un développement en série formelle de puissances de $\frac{1}{r}$ sur $\Omega \subset V_4$ satisfaisant (II-30 $\rightarrow$ 33), si ces développements sont solutions des équations du vide (II-21 $\rightarrow$ 24) et si (IV-1) est satisfait sur (Ω), alors les coefficients $\overset{n}{F}$, $\overset{n}{U}$, $\overset{n}{\omega}$, $\overset{n}{\psi}_A$, $\overset{n}{g}^{\alpha\beta}$ des développements (II-30 $\rightarrow$ 33) et (IV-11, 12) sont des polynômes en u dont le degré est au plus égal à n .

Le résultat pour les composantes $g^{\alpha\beta}$ du tenseur métrique est identique à celui obtenu dans [2].

REMERCIEMENTS

J'exprime ma profonde gratitude à M. le Professeur A. PAPAPETROU, Directeur de Recherches au C. N. R. S., pour les observations fructueuses qu'il a bien voulu me faire dans l'élaboration de ce travail.

RÉFÉRENCES

- [1] I. MORET-BAILLY et A. PAPAPETROU, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. VI, n° 3, 1967, p. 205-218.
- [2] I. MORET-BAILLY, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. IX, n° 4, 1968, p. 395-439.
- [3] H. BONDI, M. VAN DER BURG et A. METZNER, *Proc. Roy. Soc.*, t. A **269**, 1962, p. 21.
- [4] R. SACHS, *Proc. Roy. Soc.*, t. A **270**, 1962, p. 103.
- [5] E. NEWMAN et R. PENROSE, *J. Math. Phys.*, t. **3**, 1962, p. 566.
- [6] E. NEWMAN et T. UNTI, *J. Math. Phys.*, vol. 3, n° 5, 1962, p. 891.
- [7] R. PENROSE, *An Analysis of the structure of space-time* (Department of Mathematics, Birkbeck College, London, 1968).

Cette étude constitue une partie de la thèse de Doctorat ès Sciences de Mme Irène MORET-BAILLY enregistrée au C. N. R. S. sous le numéro A. O. 3512, dont la soutenance est prévue pour octobre 1969 devant la Faculté des Sciences de Paris.

(Manuscrit reçu le 19 juillet 1969).

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

"Sur les applications harmoniques en géométrie différentielle".

Vu et approuvé

Paris, le ... 22 Octobre 19 69

Le Doyen de la Faculté des Sciences
de Paris

Marc ZAMANSKY

Vu
et permis d'imprimer

Le Recteur de l'Académie de Paris

Robert MALLET

